Hans Walser, [20180918]

Petrie-Polygon des Würfels

1 Worum geht es?

Die Abbildung 1 zeigt das Petrie-Polygon des Würfels (John Flinders Petrie, 1907-1972, Mitarbeiter von Coxeter).

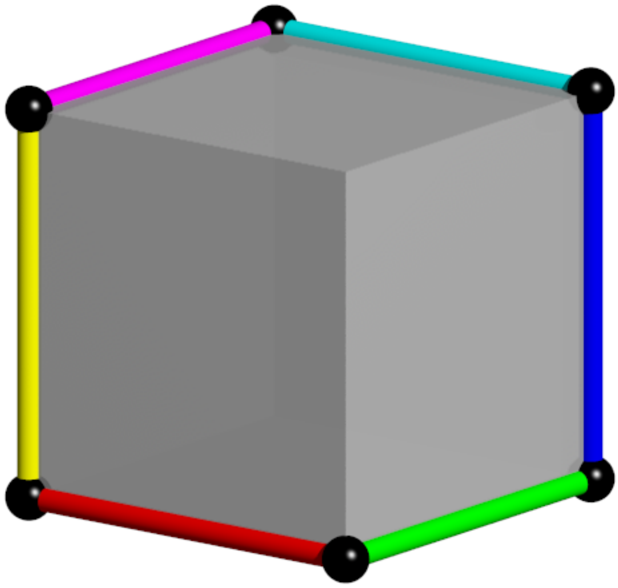

Abb. 1: Petrie-Polygon des Würfels

Es hat sechs gleich lange Seiten und sechs rechte Winkel.

Ein Diskussionspunkt ist, ob man das Polygon als „regelmäßig“ bezeichnen kann. Dazu betrachten wir zuerst das ebene Analogon.

2 Regelmäßiges Sechseck in der Ebene

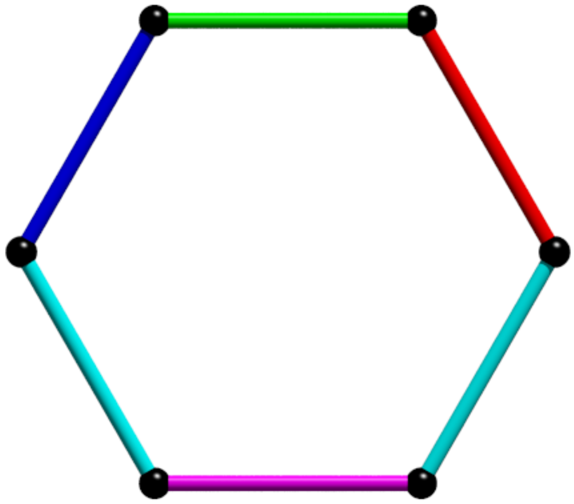

Abb. 2: Regelmäßiges Sechseck in der Ebene

Wir denken uns das Sechseck als starres Kantenmodell und bewegen nun eine Kopie davon, so dass zwei aufeinanderfolgende Kanten je auf ihre Nachfolgerin zu liegen kommen, also zum Beispiel die bewegte rote Kante auf die alte grüne Kante und die bewegte grüne Kante auf die alte blaue Kante. Dies geschieht durch eine Drehung um 60°.

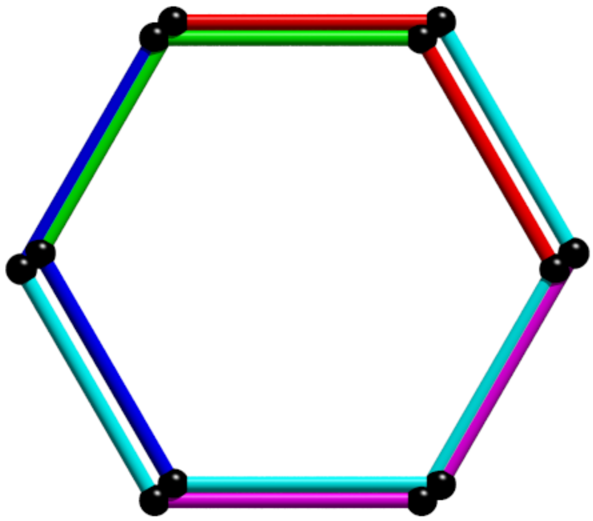

Abb. 3: Sechseck und verdrehtes Sechseck

In der Abbildung 3 ist das Bild absichtlich etwas verrutscht dargestellt, damit die Farben nachkontrolliert werden können.

Jedes Paar aufeinanderfolgender Kanten wird auf das nachfolgende Paar bewegt.

Die Figur ist regelmäßig.

3 Versuch im Raum

Die Abbildung 4 zeigt nochmals das Petrie-Polygon.

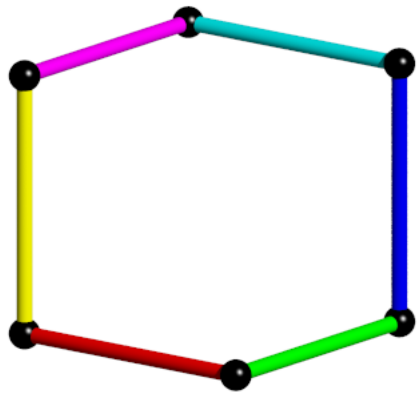

Abb. 4: Petrie-Polygon

Wir denken uns dieses Sechseck als starres Kantenmodell und bewegen eine Kopie davon so im Raum, dass die bewegte rote Kante auf die alte grüne Kante und die bewegte grüne Kante auf die alte blaue Kante zu liegen kommen (Abb. 5).

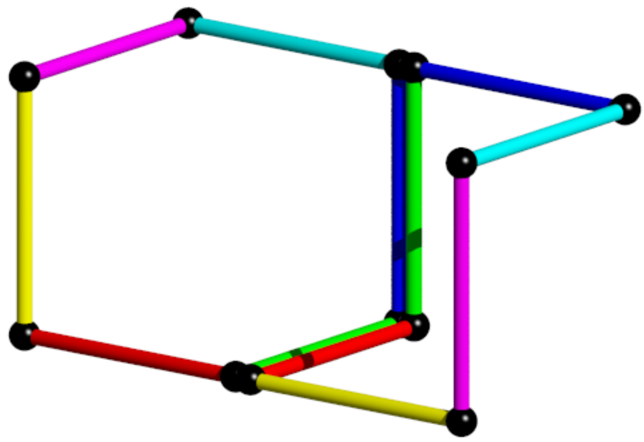

Abb. 5: Petrie-Polygon und bewegtes Petrie-Polygon

Wir sehen, dass die restlichen Kanten nicht mitspielen. Es bräuchte noch eine Ebenenspiegelung dazu. Diese ändert aber die räumliche Orientierung und ist bei einem starren Modell nicht zulässig.

Der Hintergrund ist folgender: ein Tripel von drei aufeinanderfolgenden Kanten lässt sich nicht auf das nachfolgende Tripel bewegen.

Das Petrie-Polygon des Würfels ist daher nicht regelmäßig.

4 Vektorielle Behandlung

In einem geeigneten Koordinatensystem (Abb. 6) können wir die aufeinanderfolgenden Kanten als Vektoren darstellen.

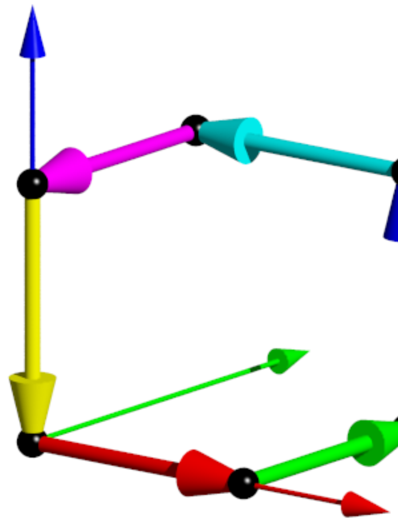

Abb. 6: Im Koordinatensystem

Es ist (in der Reihenfolge rot, grün, blau, zyan, magenta, gelb der Abb. 6):

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Weiter ist:

$$\det\left(\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right]\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = +1 \qquad (2)$$

Das erste Vektortripel ist also positiv orientiert.

Hingegen ist:

$$\det\left(\left[\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4\right]\right)=\det\left(\left[\begin{array}{ccc}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{array}\right]\right)=-1 \tag{3}$$

Das zweite Vektortripel ist negativ orientiert.

Wir haben also keine konstante Orientierung. Die Orientierung alterniert längs des Petrie-Polygons.

Das ebene Analogon dazu ist eine (unendlich lange) Zickzacklinie (Abb. 7). Wir haben zwar gleiche Seiten und betragsmäßig gleiche Winkel, aber die Orientierung der Winkel alterniert.

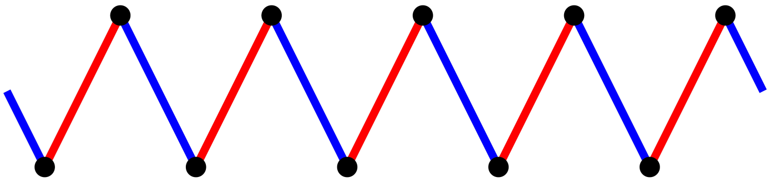

Abb. 7: Nicht regelmäßiger Polygonzug

5 Regelmäßiges Polygon im Raum

Mit den Vektoren

$$\vec{v}_{3k+1}=\left[\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right] \qquad \vec{v}_{3k+2}=\left[\begin{array}{c}0\\1\\0\end{array}\right] \qquad \vec{v}_{3k}=\left[\begin{array}{c}0\\0\\1\end{array}\right] \qquad k\in\mathbb{Z} \tag{4}$$

ist:

$$\det\left(\left[\vec{v}_{m+1},\vec{v}_{m+2},\vec{v}_{m+3}\right]\right)=+1, \quad \forall m\in\mathbb{Z} \tag{5}$$

Jedes Tripel aufeinanderfolgender Vektoren ist gleich orientiert. Der Vektorzug ist regelmäßig.

Wir erhalten eine eckige Schraubenlinie im Raum. Die Abbildung 8 zeigt einen Ausschnitt.

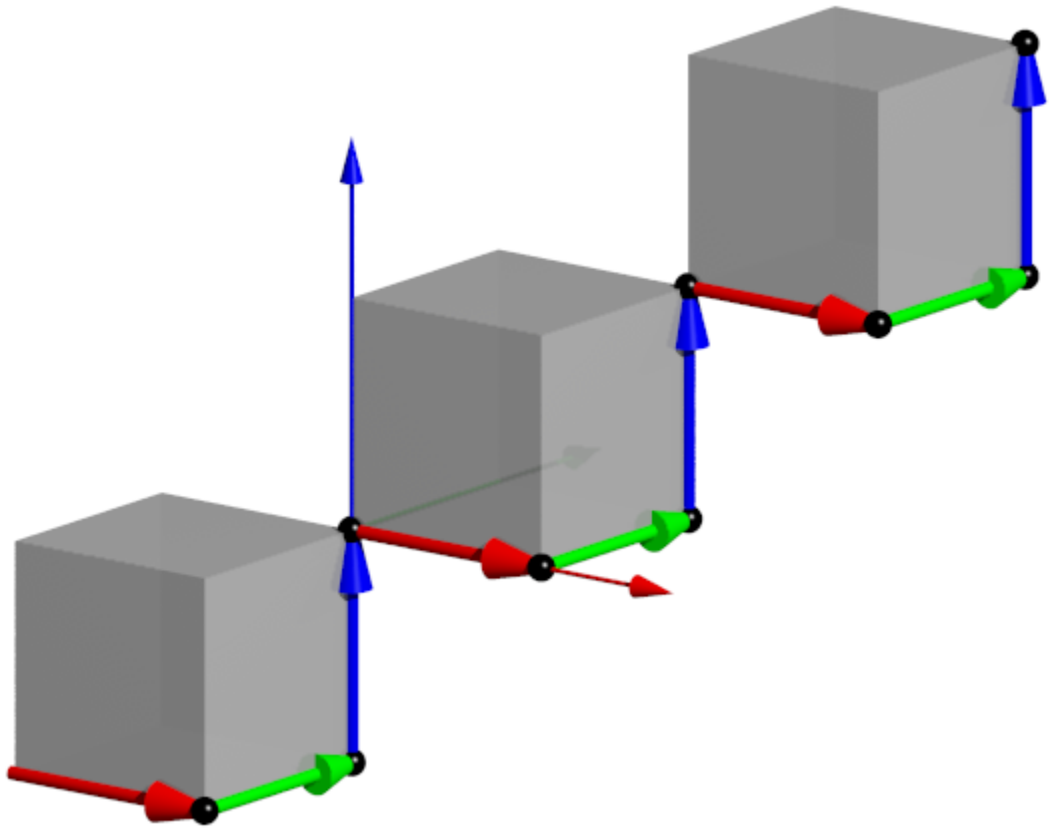

Abb. 8: Regelmäßiger Vektorzug im Raum