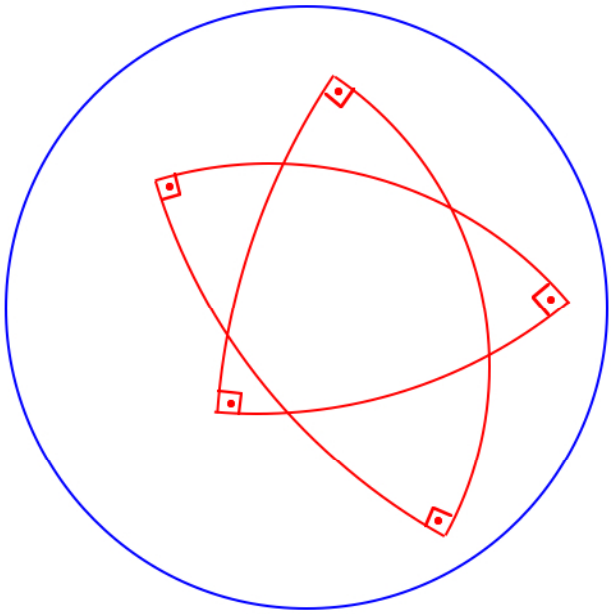
Hans Walser, [20110129a]

## Pentagramma mirificum

Anregung: [Heinrich 2010]

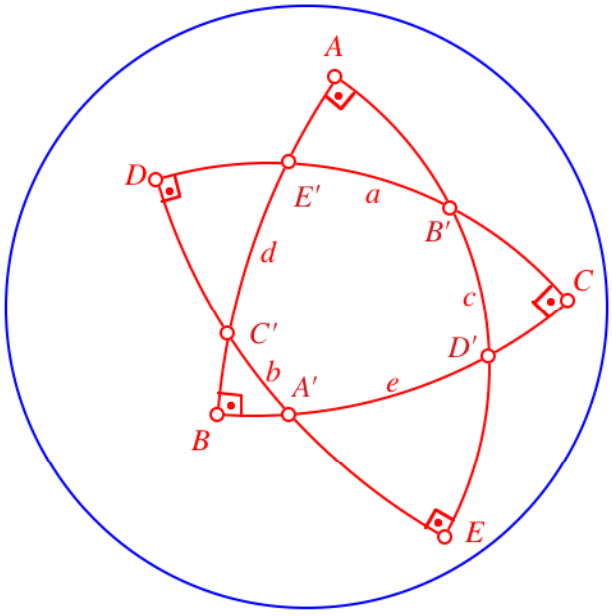
## 1 Worum es geht

Ein Pentagramma mirificum ist ein sphärisches Pentagramm mit rechten Winkeln an den Spitzen. Die Abbildung zeigt ein Beispiel in stereografischer Projektion. Der blaue Kreis ist der Hauptkreis (Bild des Äquators in Standarddisposition).



Pentagramma mirificum

### 1.1 Pol und Polare

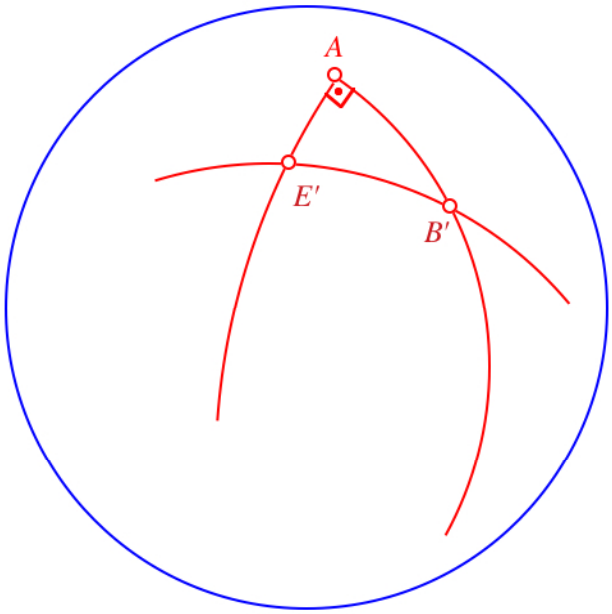



Bezeichnungen

Wegen der rechten Winkel bei $C$ und $D$ ist $A'$ ein Pol zu $a$. Daher haben die Bögen $\overset{\frown}{A'D}$, $\overset{\frown}{A'E'}$, $\overset{\frown}{A'B'}$ und $\overset{\frown}{A'C}$ alle die Länge $\frac{\pi}{2}$. Analog für die übrigen vier Seiten des Pentagramms.

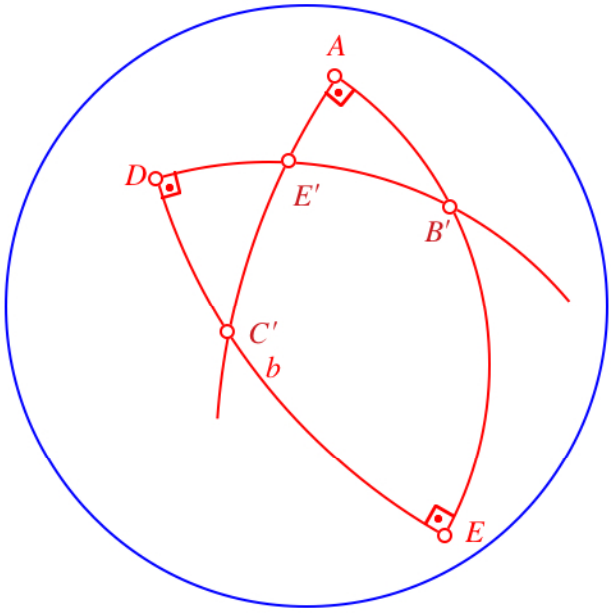
## 1.2 Konstruktion

Wir beginnen mit einem bei $A$ rechtwinkligen Dreieck $AE'B'$.



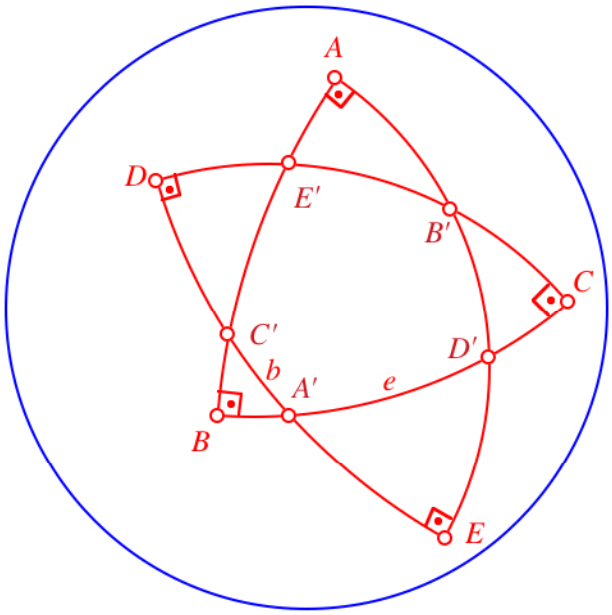

**Erster Schritt**

Nun zeichnen wir $b$ = Polare von $B'$. Der Schnittpunkt mit dem Großkreis $B'E'$ sei $D$, der Schnittpunkt mit dem Großkreis $AE'$ sei $C'$ und der Schnittpunkt mit dem Großkreis $AB'$ sei $E$. Es ergeben sich die beiden rechten Winkel bei $D$ und $E$.




**Zweiter Schritt**

Als letztes zeichnen wir $e$ = Polare von $E'$. Wir erhalten die Schnittpunkte und rechten Winkel gemäß Abbildung. Damit ist das Pentagramma mirificum komplett.

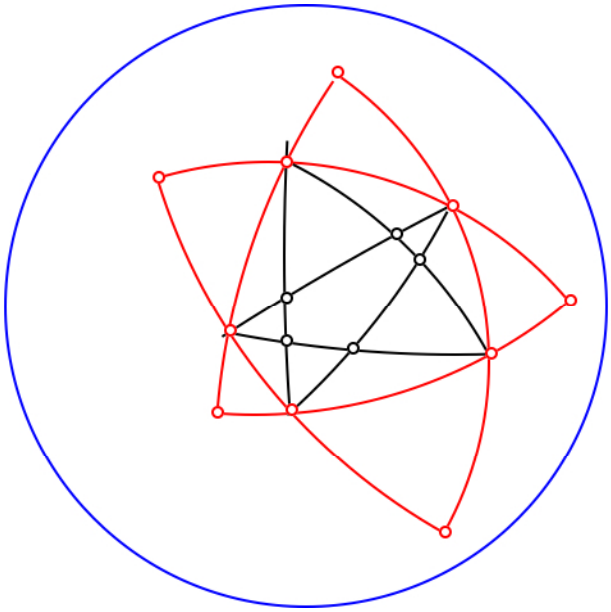



**Dritter und letzter Schritt**

Als Folge der rechten Winkel sind $a$ = Polare von $A'$ der Großkreis $B'E'$, $c$ = Polare von $C'$ der Großkreis $D'B'$ und $d$ = Polare von $D'$ der Großkreis $E'C'$.

Wir haben eine erstaunliche fünfteilige Schließungsfigur.

In der folgenden Abbildung sind auch noch das Pentagramm $A'B'C'D'E'$ eingezeichnet. Dieses Pentagramm hat die Seitenlänge $\frac{\pi}{2}$.

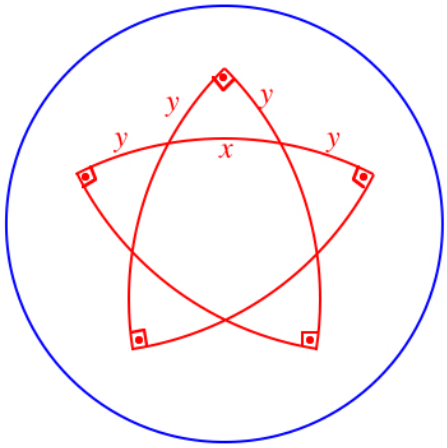


**Kleines Pentagramm**

## 2 Das regelmäßige Pentagramma mirificum

### 2.1 Berechnungen

Die Abbildung zeigt das regelmäßige Pentagramma mirificum.




**Regelmäßiges Pentagramma mirificum**

Für die eingezeichneten Bogenlängen $x$ und $y$ gilt zunächst:

$$x+y=\frac{\pi}{2}$$
$$\cos(x+y)=0$$
$$\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)=0$$

Der sphärische Pythagoras liefert $\cos(x)=\cos^2(y)$. Damit erhalten wir:

$$\cos^2(y)\cos(y)-\sqrt{1-\cos^4(y)}\sqrt{1-\cos^2(y)}=0$$
$$\cos^3(y)=\sqrt{1-\cos^2(y)-\cos^4(y)+\cos^6(y)}$$
$$\cos^6(y)=1-\cos^2(y)-\cos^4(y)+\cos^6(y)$$
$$0=1-\cos^2(y)-\cos^4(y)$$

Damit wird:

$$\cos^2(y)=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Uns interessiert nur die reelle Lösung, also $\cos(y)=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$. Hier erscheint der goldene Schnitt (vgl. [Walser 2009]).

### 2.2 Der goldene Schnitt

Mit der Bezeichnung $\rho=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.61803398875$ erhalten wir:

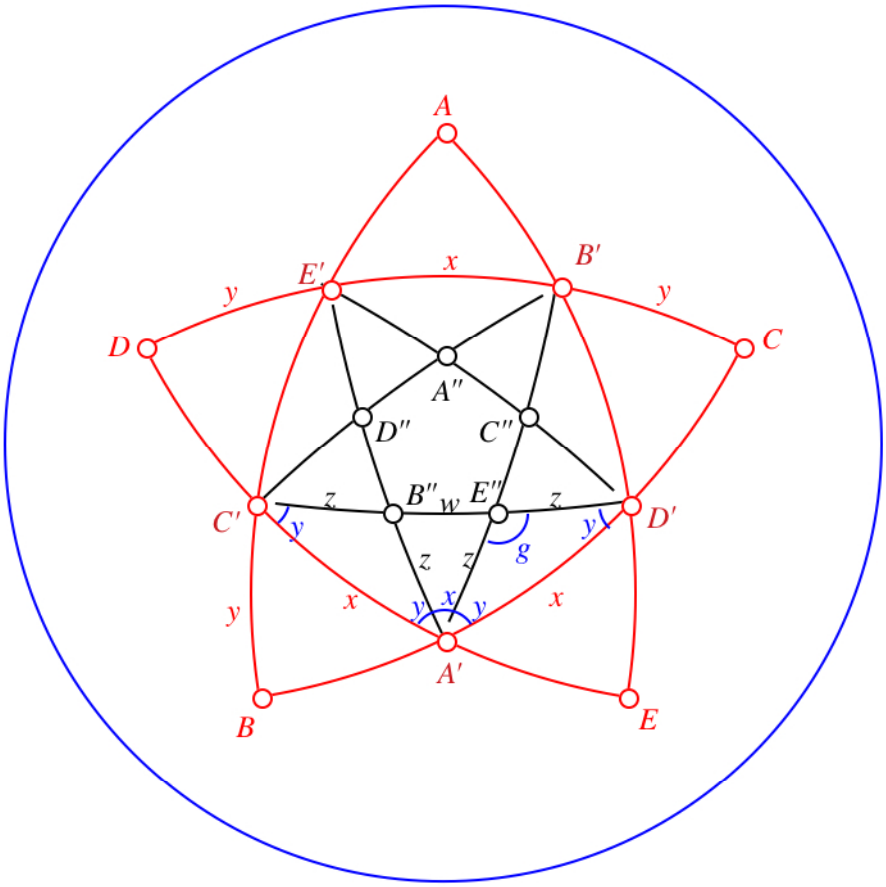
$$y=\arccos\left(\sqrt{\rho}\right)\approx 0.6662394325\triangleq 38.17270763°$$

Wegen $\cos(x)=\cos^2(y)$ folgt:

$$x = \arccos(\rho) \approx 0.9045568943 \triangleq 51.82729237°$$
$$y = \arcsin(\rho) \approx 0.6662394325 \triangleq 38.17270763°$$

## 2.3 Diagonalen

Wir führen nun auch noch die inneren Diagonalen ein.




**Diagonalen und Bezeichnungen**

Auf Grund der Polaritätsbeziehungen erscheinen $x$ und $y$ nun auch als Winkel. Diese sind in der Abbildung blau markiert. Wir berechnen $z$ und $w$. Der Sinn dieser fürchterlichen Rechungen ist, nachher ein handfestes Modell zu bauen.

Im Dreieck $A'D'E''$ erhalten wir mit dem Winkel-Kosinus-Satz:

$$\cos(g) = -\underbrace{\cos^2(y)}_{\rho} + \underbrace{\sin^2(y)}_{1-\rho}\underbrace{\cos(x)}_{\rho} = -\rho + \rho - \rho^2 = -\rho^2$$

$$g = \arccos\left(-\rho^2\right) \approx 1.96271900224 \triangleq 112.45551519858°$$

Mit dem Seiten-Kosinus-Satz ergibt sich weiter:

$$\underbrace{\cos(x)}_{\rho} = \cos^2(z) + \sin^2(z)\underbrace{\cos(g)}_{-\rho^2}$$

$$\rho = 1 - \sin^2(z) - \rho^2 \sin^2(z)$$

$$\sin^2(z) = \frac{1-\rho}{1+\rho^2} = \frac{\rho^2}{1+\rho^2}$$

$$\cos^2(z) = 1 - \frac{1-\rho}{1+\rho^2} = \frac{\rho^2+\rho}{1+\rho^2} = \frac{1}{1+\rho^2}$$

$$z = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{1+\rho^2}}\right) \approx 0.5535743589$$

Im Dreieck $A'E''B''$ ergibt sich mit dem Seiten-Kosinus-Satz:

$$\cos(w) = \underbrace{\cos^2(z)}_{\frac{1}{1+\rho^2}} + \underbrace{\sin^2(z)}_{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\underbrace{\cos(x)}_{\rho}$$

$$\cos(w) = \frac{1+\rho^3}{1+\rho^2}$$

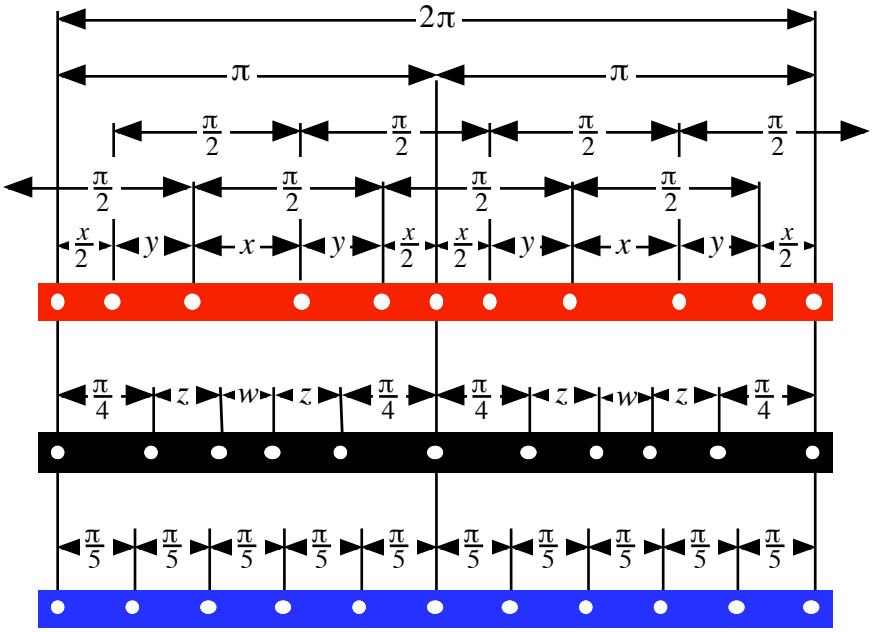
$$w = \arccos\left(\frac{1+\rho^3}{1+\rho^2}\right) \approx 0.463647609$$

## 2.4 Streifenmodell

Für ein Streifenmodell (vgl. [Walser 2010]) brauchen wir Streifen nach folgendem Maßmuster. Dabei ist $x \approx 0.905$, $y \approx 0.666$, $z \approx 0.554$ und $w \approx 0.464$.

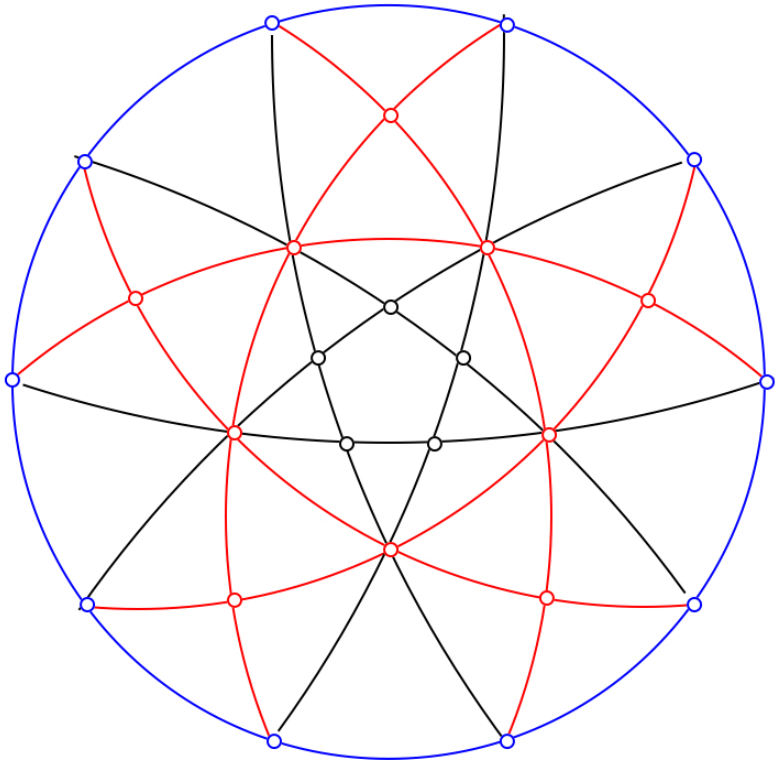
Vom ersten Streifentyp (rot) benötigen wir 5 Exemplare, diese Streifen beranden das regelmäßige Pentagramma mirificum. Vom zweiten Streifentyp (schwarz) benötigen wir ebenfalls 5 Exemplare, diese Streifen bilden die Diagonalen. Der dritte Streifen (blau) kann optional für den Hauptkreis (Äquator) verwendet werden, wir benötigen nur ein Exemplar.

Wir erhalten damit je ein regelmäßiges Pentagramma mirificum auf jeder Halbsphäre. Wenn wir nur eine Halbsphäre mit einem regelmäßigen Pentagramma mirificum haben wollen, brauchen wir von den roten und schwarzen Streifen nur je die Hälfte.




**Streifenmuster**

Die folgende Abbildung zeigt die obere Halbsphäre in stereografischer Projektion.

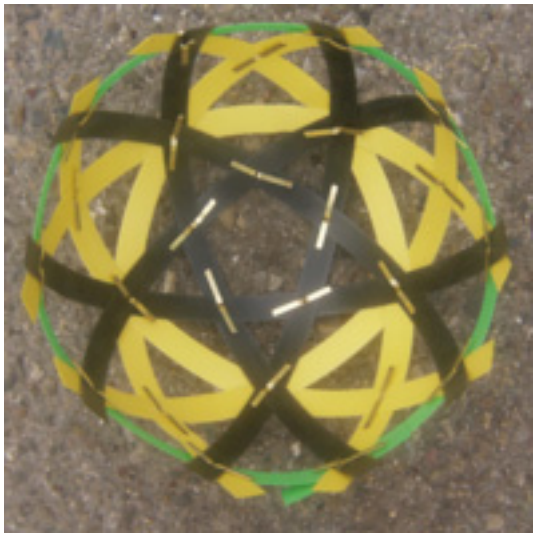


**Ober Halbsphäre**

Die folgenden Abbildungen zeigen ein Halbkugelmodell. Das Penatgramma mirificum wird durch gelbe Streifen gebildet. Die Diagonalen sind schwarz und der Äquator grün. Zuerst ein Schrägbild und dann ein Bild von ganz oben.

**Halbkugelmodell**

Instruktiv ist auch ein Blick ins Innere der Halbkugel.



**Sicht von innen**

## Literatur


[Heinrich 2010] Heinrich, Frank: Pentagrammafigurationen. MU Der Mathematikunterricht. Elemente nichteuklidischer Geometrien. Jahrgang 56. Heft 6. Dezember 2010. Friedrich Verlag, Seelze. S. 39-52.

[Walser 2009] Walser, Hans: Der Goldene Schnitt. 5., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2009. ISBN 978-3-937219-98-1

[Walser 2010] Walser, Hans: Handgreifliche Modelle der Kugelgeometrie und der hyperbolischen Geometrie. MU Der Mathematikunterricht. Elemente nichteuklidischer Geometrien. Jahrgang 56. Heft 6. Dezember 2010. Friedrich Verlag, Seelze. S. 28-37.