Hans Walser, [20051126a]

1											
–5	1										
10	–4	1									
–10	6	–3	1								
5	–4	3	–2	1							
–1	1	–1	1	–1	1						
						1					
						1	1				
						1	2	1			
						1	3	3	1		
						1	4	6	4	1	
						1	5	10	10	5	1

Was war vor den Startwerten?

Inhalt

0 Entdeckendes Lernen

Zwei Monate im Labor
erspart einen halben Tag in der Bibliothek.

0.1 Einerseits

Entdeckendes Lernen, neuerdings sogar *selbst entdeckendes Lernen* gehört zum verbalen Standardrepertoir eines jeden Pädagogikers. Dabei wird übersehen, dass die Wissenschaft und insbesondere die Mathematik ein mehrtausendjähriges Kulturgut ist; Lehren ist die Weitergabe dieses tradierten Wissens. Selbst ein begabter Schüler wird kaum in stundenplanmäßigen 45 Minuten ein Theorem entdecken, dessen Erarbeitung die besten Köpfe der Menschheit während Jahrhunderten forderte.

Entdeckendes Lernen ist wie das Egg Hunting an Ostern: Die im Lehrplan vorgeschriebenen Ostereier werden von der qualitativ hoch stehenden Lehrperson derart in der Lernumgebung versteckt, dass mindestens 95% der Schülerinnen und Schüler diese auch finden. Dabei spielt eine doppelte Schummelei: Die Lehrperson bietet die Lernumgebung als unerforschtes Neuland an, und die Schülerinnen und Schüler geben vor, das zu glauben.

0.2 und andererseits

Rein rezeptives Lernen ist passiv und mumifiziert das Kulturgut der Wissenschaften. Leute, welche mit Filzstiften in allen Farben durch die Texte fegen, sind nachher strukturierte Alleswisser mit einem Gefieder wie ein Papagei, aber handwerkliche Nichtskönner. Das Herunterleiern eines Beweises bedeutet noch kein Verständnis für die Sache. Und es ist auch keine Freude dabei.

Daher schadet es auch nichts, gelegentlich zwei Monate im Labor zu forschen, auch wenn die Sache längst publiziert ist.

0.3 Zur Sache

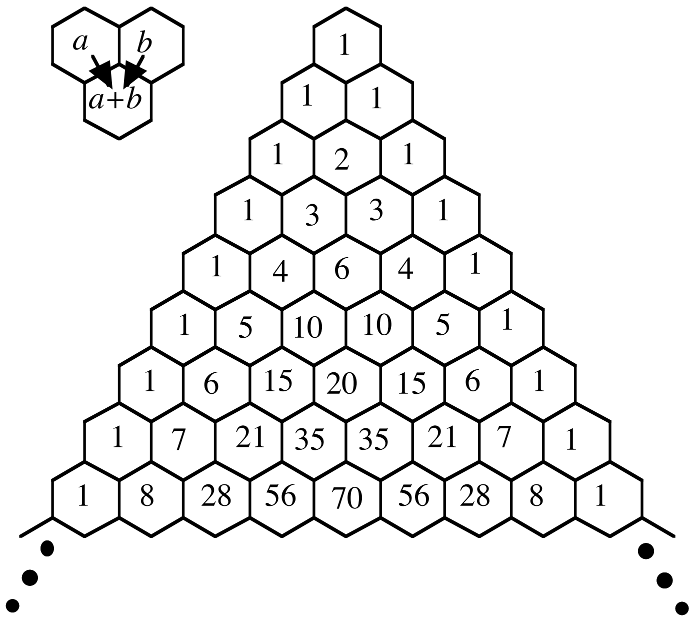
Zu DDR-Zeiten war es erforderlich, in einem didaktischen Artikel einleitend auf die gesellschaftspolitische Relevanz der Sache einzugehen. Noch früher musste das Loblied auf den Landesvater gesungen werden. Heute ist es üblich, einen pädagogischen Vorspann zu geben, was hiemit geschehen ist.

Und nun zur Sache: Was war vorher? Was war vor Adam und Eva? Wie es nachher weiterging, ist Sache des Sexualkundeunterrichtes und nicht weiter interessant. Aber was war vorher? Diese Frage soll bereits Newton beschäftig haben.

1 Erinnerungen

1.1 Pascal mit einer Spitze

Ein jedermann im Lande kennt, was man ein Pascal-Dreieck nennt.



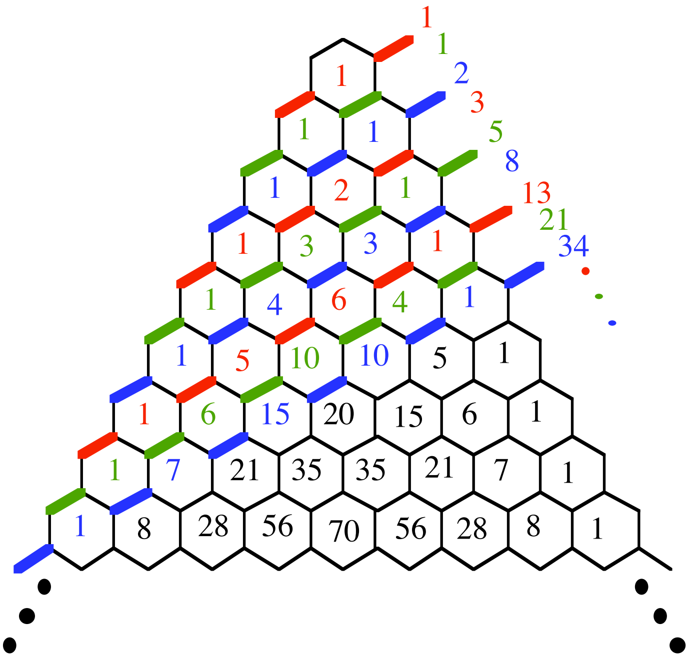
Pascal-Dreieck

Bei der Darstellung im Hexagonalmuster ist es ein gleichseitiges Dreieck, das aber nach unten ins Bodenlose geht.

Die Rekursion besteht darin, dass jede Zahl die Summe der unmittelbar links oben und rechts oben stehenden Zahlen ist. In der Figur ist die Rekursion schematisch angegeben. Sie funktioniert auch an den Rändern, wenn das Hexagonalnetz weitergedacht wird, aber mit Nullen gefüllt. Einzige Ausnahme ist die Eins an der Spitze, die wie ein Deus ex Machina aus dem Nichts erscheint. Man spricht dann beschönigend von einem „Startwert“, so wie Adam und Eva die Startwerte der Menschheit waren. In einem Weltbild, das ohne direkte göttliche Eingriffe und somit ohne Anfang und ohne Ende gedacht wird, ist diese Eins störend.

1.2 Fibonacci comes in

Die „Schrägzeilensummen“ im Pascal-Dreieck ergeben die Fibonacci-Zahlen.



Fibonacci-Zahlen

In der Figur sind diese Schrägzeilen — es sind die Senkrechten auf die Dreiecksseite links — jeweils durch eine der drei Farben rot, grün, blau hervorgehoben. Da jede zum Beispiel rote Pascal-Zahl gemäß Rekursion die Summe einer darüber liegenden blauen und einer grünen Pascal-Zahl ist, folgt sofort, dass auch für die Schrägzeilensummen, also die Fibonacci-Zahlen, diese Eigenschaft gilt. Die Fibonacci-Rekursion

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

ist also eine Folge der Pascal-Rekursion.

Aus der Fibonacci-Rekursion ergibt sich zusammen mit den Startwerten $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$ die Fibonacci-Folge mit den in der Figur dargestellten Zahlen.

n	1	2	3	4	5	6	...
f_n	1	1	2	3	5	8	...

Fibonacci-Zahlen

2 Was war vor den Startwerten?

Nun kann man die Fibonacci-Folge problemlos auch nach rückwärts laufen lassen.

n	…	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	…
f_n	…	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	…

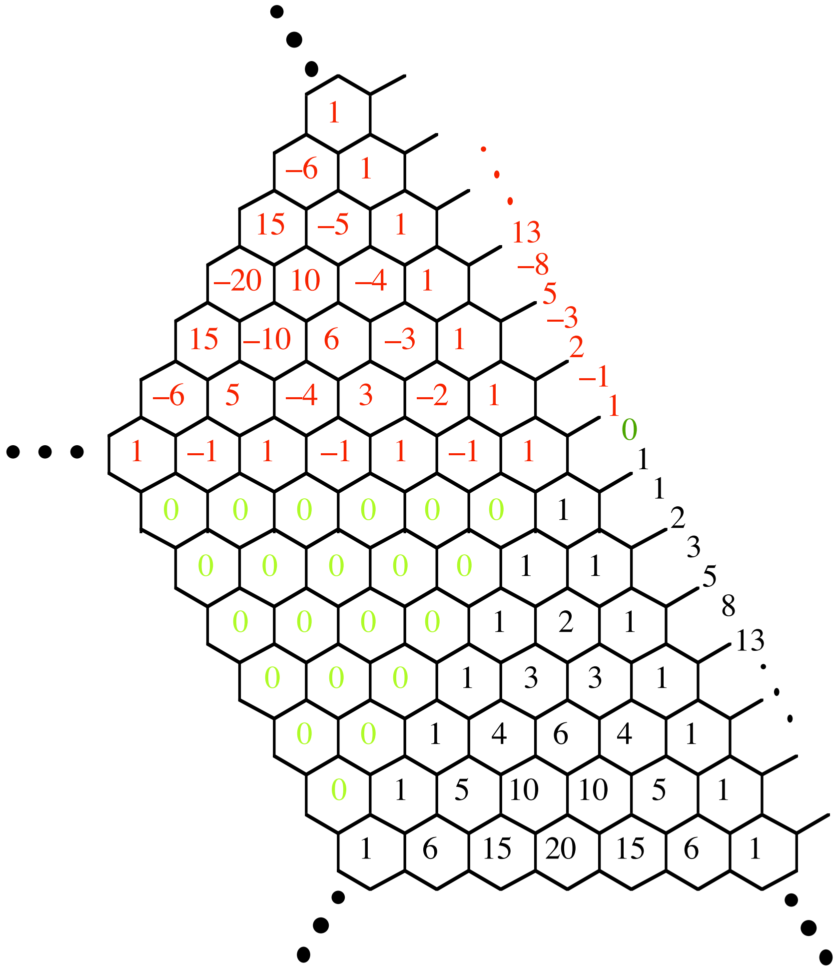
Fibonacci-Zahlen

Es erscheinen zunächst die Null und dann spiegelbildlich die Fibonacci-Zahlen, aber mit alternierenden Vorzeichen.

Nun drängt sich die Frage auf:

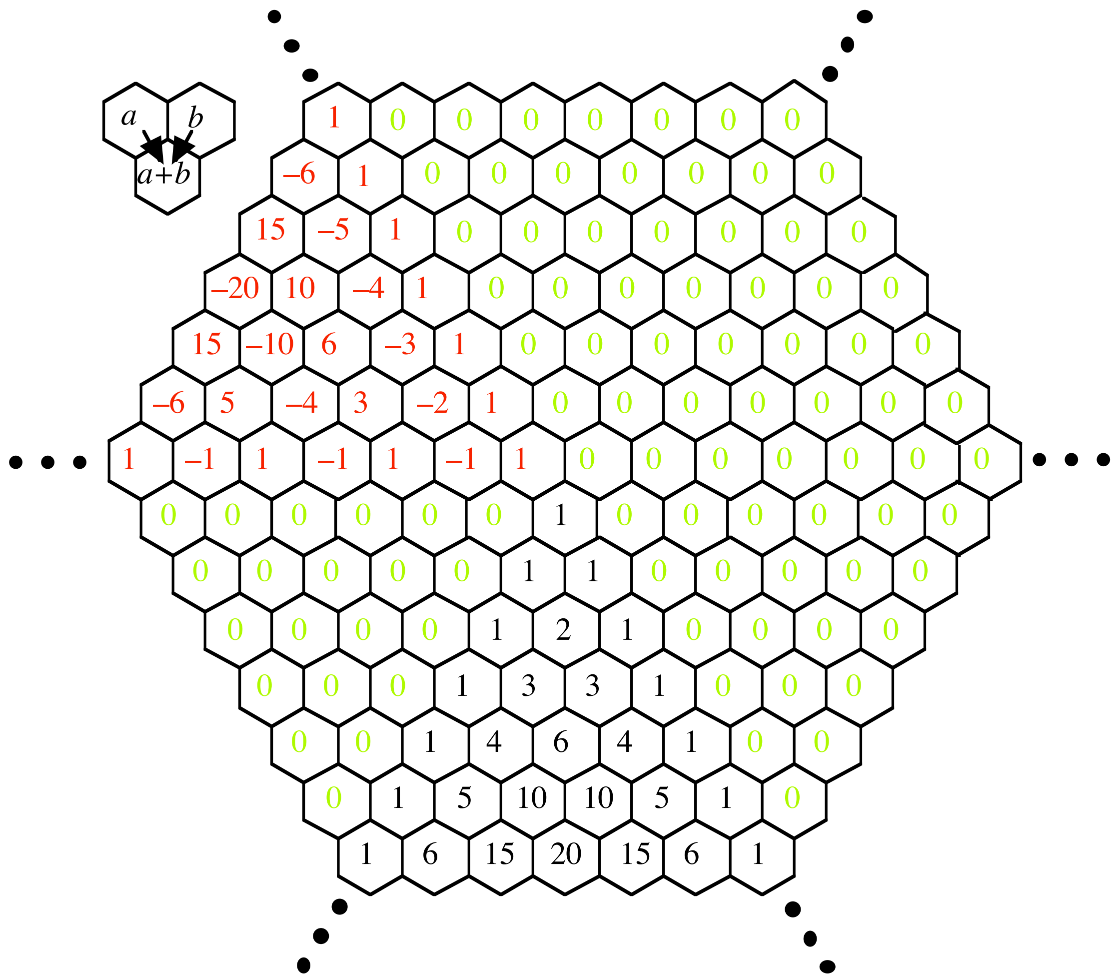
Wie kann das Pascal-Dreieck über seine Spitze mit der ominösen Eins hinaus so zurück verfolgt werden, dass die Sache kompatibel mit der ins Negative fortgesetzten Fibonacci-Folge ist?

Die folgende Figur zeigt eine mögliche Lösung (vgl. [Hilton/Holton/Pedersen 1998], S. 197, [Hilton/Holton/Pedersen 2002], S. 163).



Pascal und Fibonacci

In der folgenden Figur sind nur noch die Pascal-Zahlen dieser Lösung angegeben.



Pascal

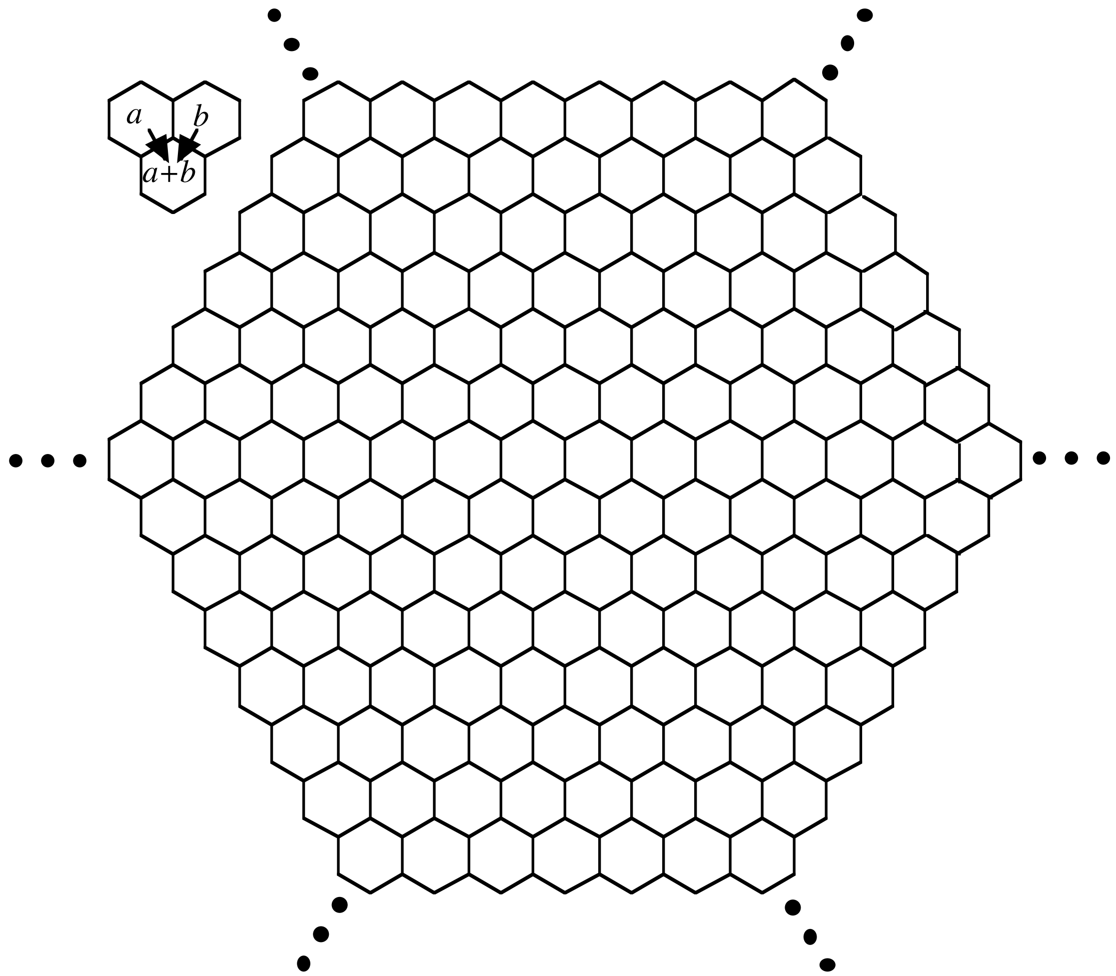
Die neuen, roten Zahlen sind auch Pascal-Zahlen, aber mit alternierenden Vorzeichen.

Zudem ist es nun so, dass das in allen Richtungen ins Unendliche fortgesetzte Hexagonalnetz nun mit Zahlen so gefüllt ist, dass überall, und insbesondere auch an der Spitze des ursprünglichen schwarzen Pascal-Dreieckes, die Pascal-Rekursion spielt. Dabei ist zu beachten, dass die Pascal-Rekursion immer von oben nach unten arbeitet. Die Vergangenheit ist also oben und die Zukunft unten, wie im Weltbild der alten Römer.

Im roten Dreieck ist „unten“ die Seite mit den Zahlen ±1.

3 Pascal-Ebenen

Eine Pascal-Ebene ist ein in allen Richtungen ins Unendliche fortgesetzte Hexagonalnetz, deren Hexagone so mit Zahlen gefüllt sind, dass überall die Pascal-Rekursion erfüllt ist. Wir haben oben ein Beispiel dazu. Ein triviales Beispiel besteht ausschließlich aus Nullen. Die Leserin ist eingeladen, selber weitere Beispiele zu finden. Dazu kann das leere Hexagonalnetz verwendet werden.

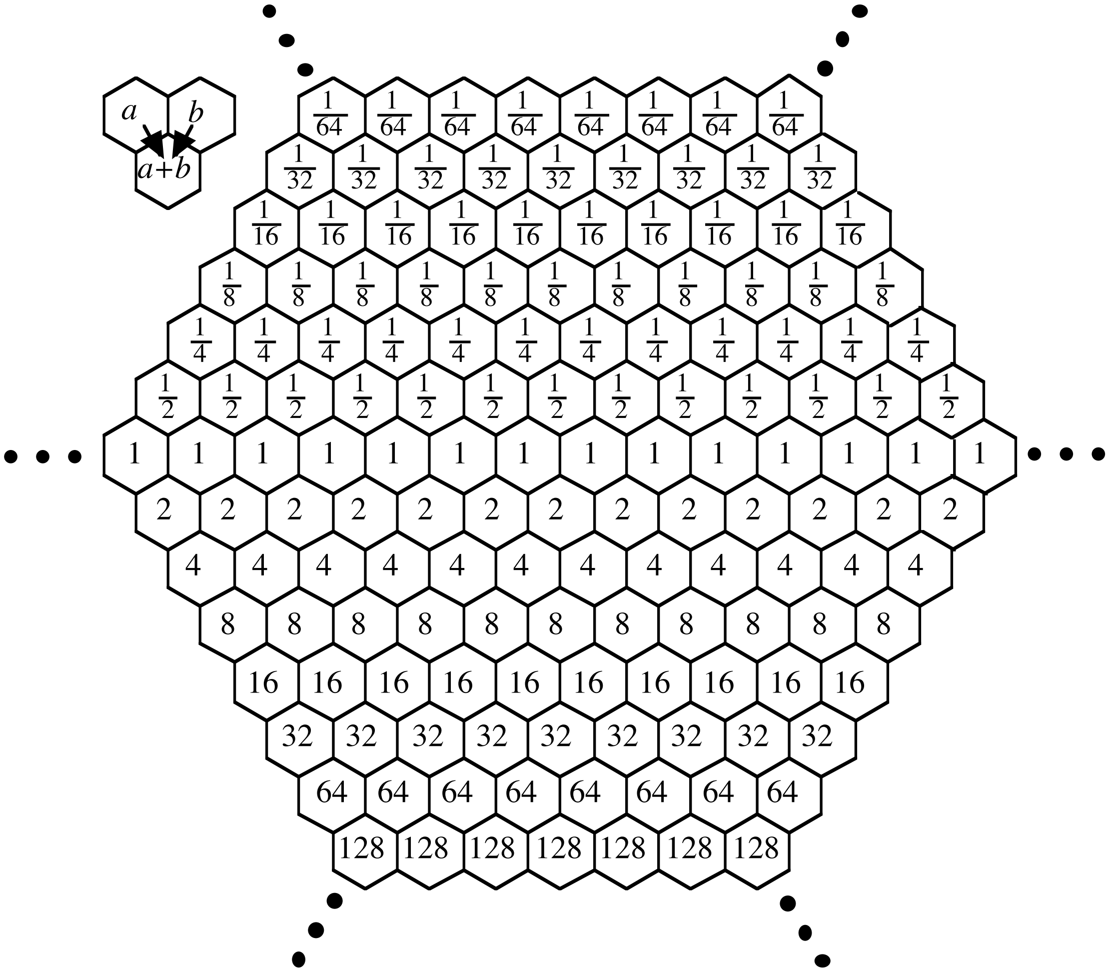


Hexagonalnetz

3.1 Beispiele

3.1.1 Zweierpotenzen

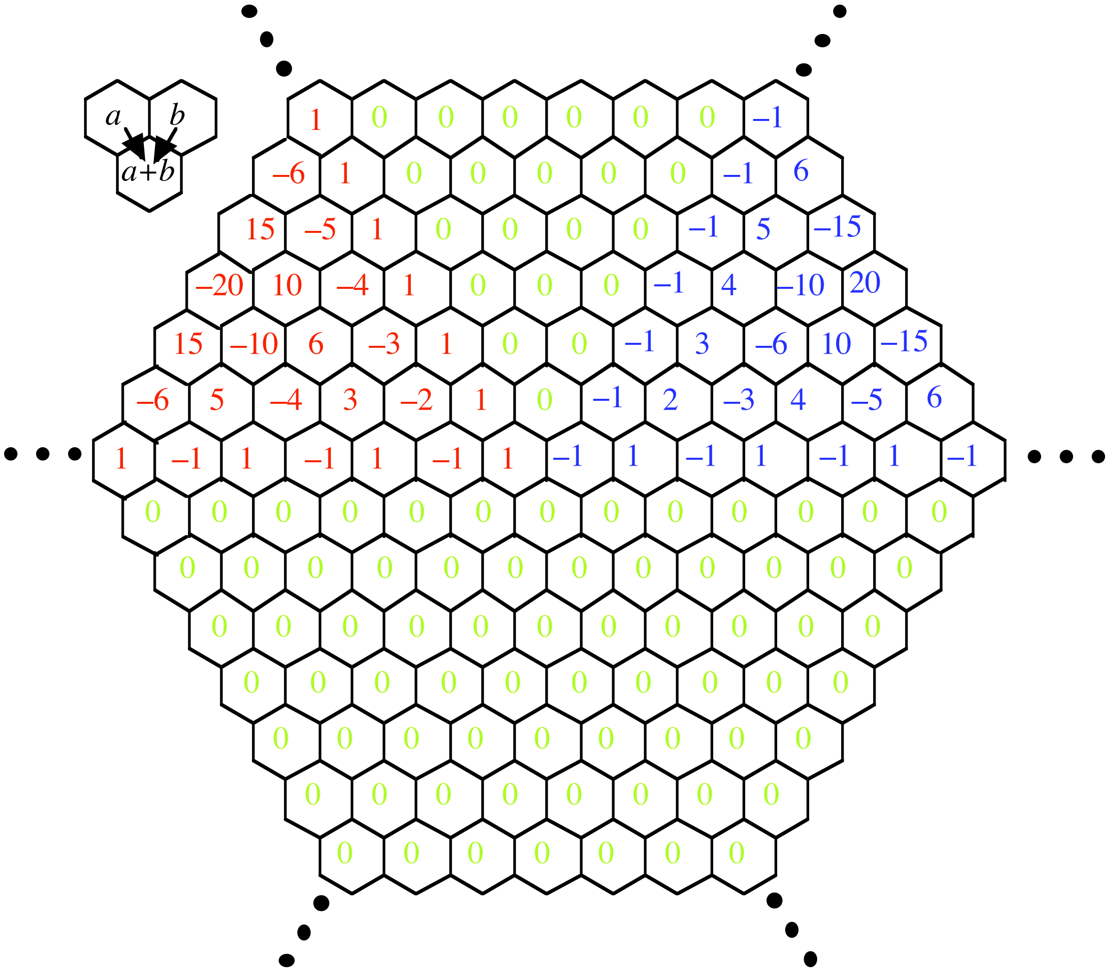
Ein simples Beispiel, das aber Brüche benötigt, besteht aus Potenzen der Zahl 2.



Zweierpotenzen

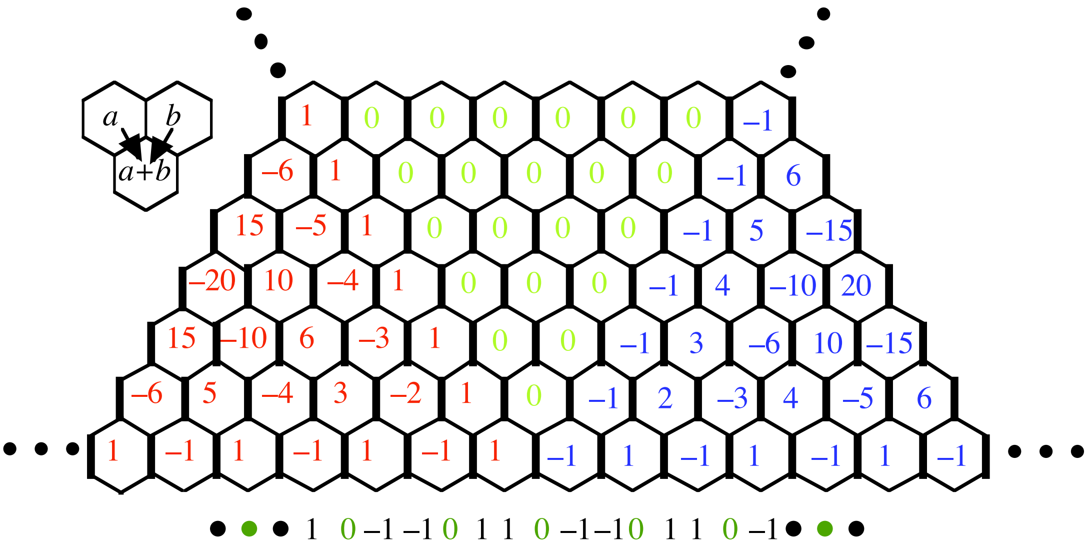
3.1.2 Zwei Dreiecke und viele Nullen

Sobald sich eine Reihe mit alternierend entgegengesetzt gleichen Zahlen ergibt, gibt es darunter nur noch Nullen. Im folgenden Beispiel erkennen wir wieder die Pascal-Zahlen mit alternierendem Vorzeichen.



Halbebene

Wir bilden nun in diesem Beispiel die Spaltensummen.



Spaltensummen

Wir erhalten die Folge:

n	...	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	...
f_n	...	–1	–1	0	1	1	0	–1	–1	0	1	1	0	...

Periodische Folge

Diese Folge ist periodisch mit der Periodenlänge 6 und der Antiperiodenlänge 3. Sie ergibt sich aus den Startwerten $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$ und der Rekursion:

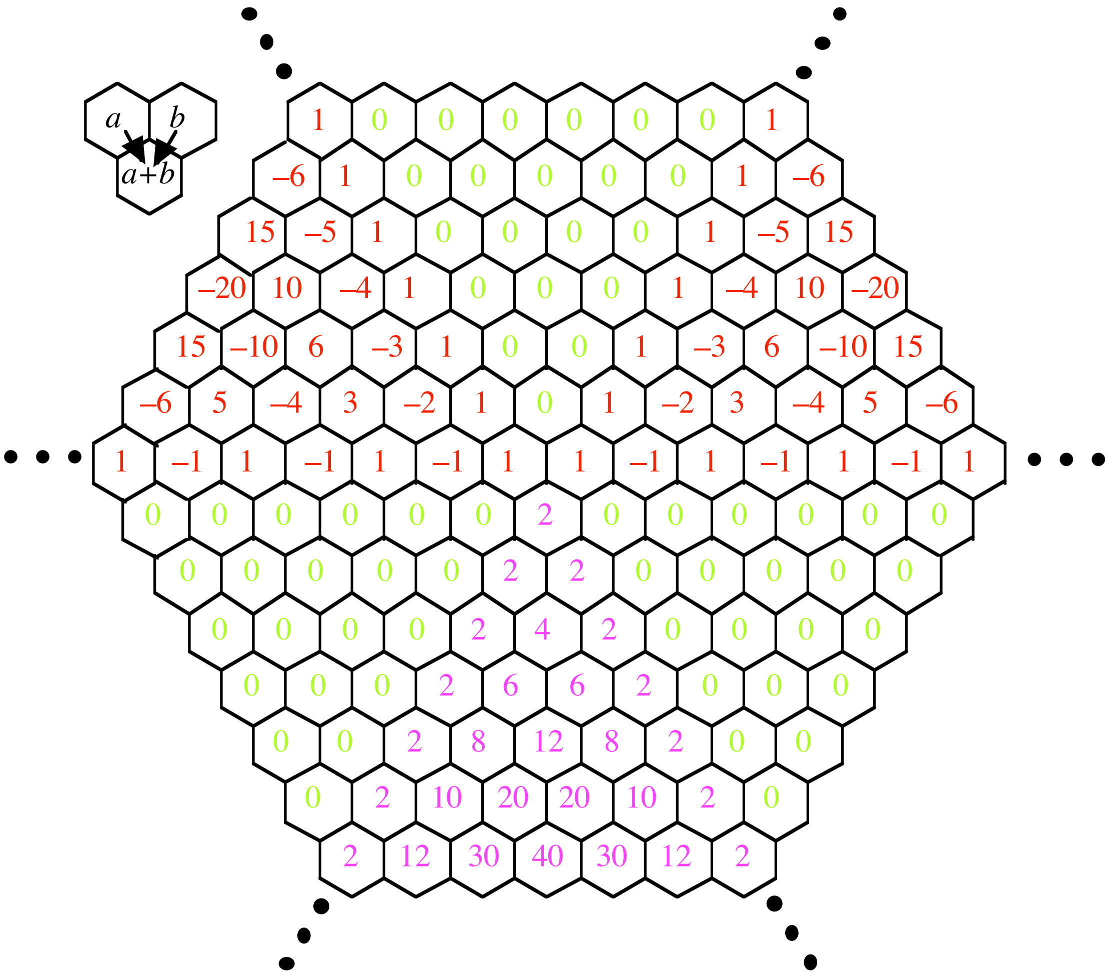
$$f_n = f_{n-1} - f_{n-2}$$

Die Folge ist also eine nur geringfügige Modifikation der Fibonacci-Folge.

Was ergibt sich bei anderen Startwerten?

3.1.3 Ändern der Vorzeichen

Nun ändern wir im Dreieck rechts alle Vorzeichen. Dann ergibt sich die folgende achsensymmetrische Figur (vgl. [Hilton/Holton/Pedersen 1998], S. 197, [Hilton/Holton/Pedersen 2002], S. 163).

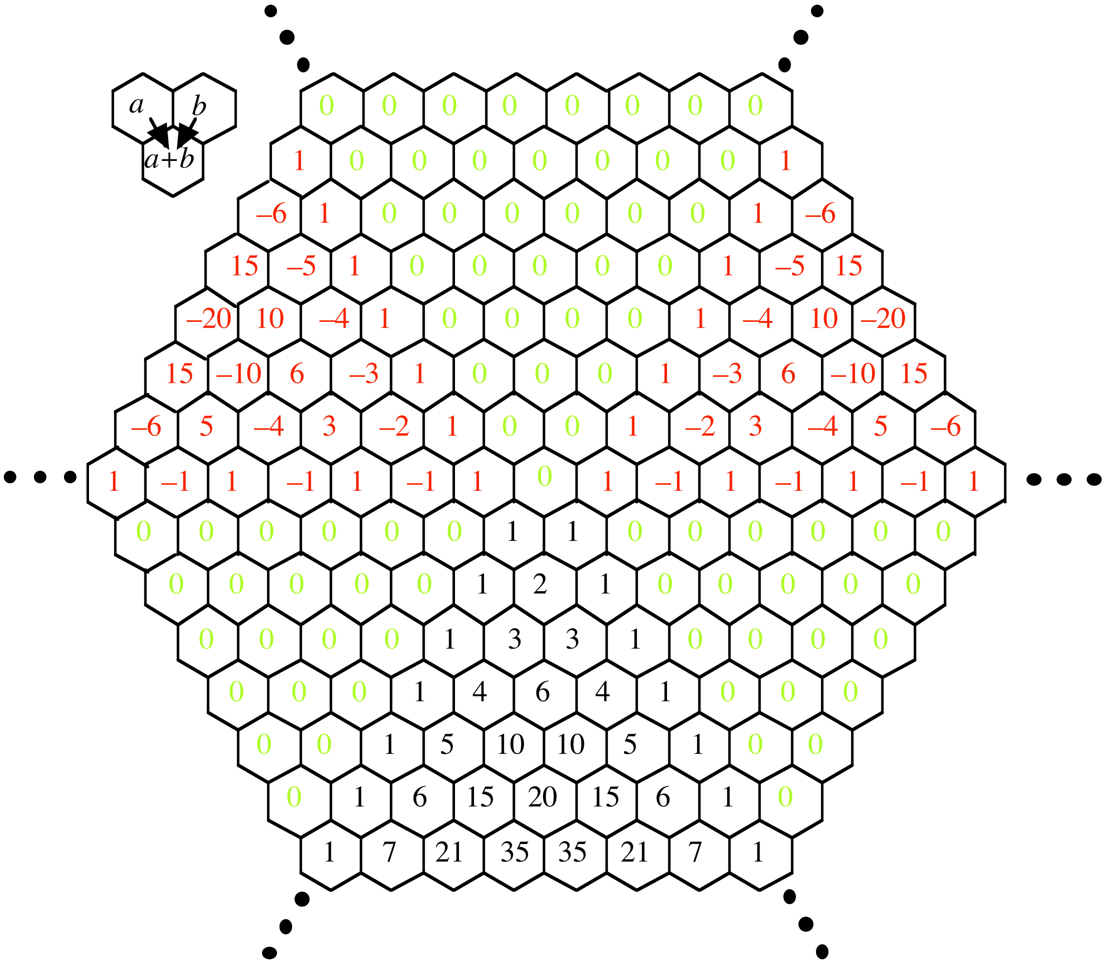


Achsensymmetrische Figur

Wir erkennen unten ein Dreieck mit den doppelten Pascal-Zahlen.

3.1.4 Null in der Mitte

Wir schieben die beiden oberen symmetrischen Dreiecke um eine Einheit auseinander.



Null in der Mitte

Dann ergibt sich unten das ursprüngliche Pascal-Dreieck, aber ohne die ominöse Eins an der Spitze. Eine Art Götterdämmerung.

4 Binomialkoeffizienten

4.1 Berechnung

Für die Pascal-Zahlen wird in der Regel die folgende Darstellung und Symbolik verwendet.

$$\begin{array}{cccccc} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \end{array}$$

Für die Berechnung gilt die Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

Wegen

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

gilt aber auch:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(n-k)+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k)} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k)}$$

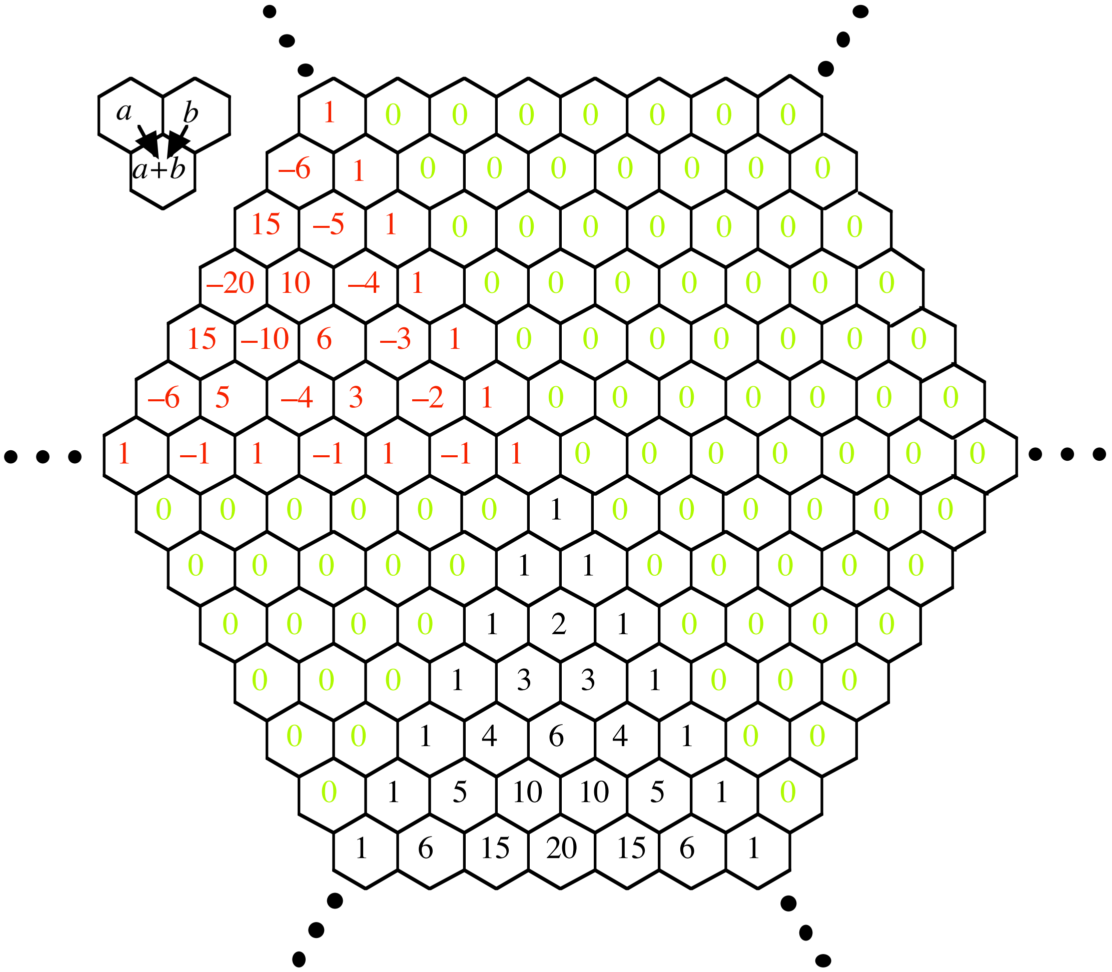
Exemplarisch:

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

Wir haben oben und unten gleich viele Faktoren, nämlich $(n-k)$. Oben fängt es mit dem n an und geht runter, unten fängt es mit 1 an und geht rauf.

Für $k = n$ versagt die Regel, hier wird $\binom{n}{n} = 1$ definiert.

Diese Regeln sind auf die Verallgemeinerung der folgenden Figur mit dem übertragbar.



Nochmals das erweiterte Pascal-Dreieck

Die Darstellung in senkrechten Spalten und waagerechten Zeilen ergibt:

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 \\
-4 & 1 \\
6 & -3 & 1 \\
-4 & 3 & -2 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
 & & & & & 1 \\
 & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

oder symbolisch:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\binom{-5}{-5} \\
\binom{-4}{-5} & \binom{-4}{-4} \\
\binom{-3}{-5} & \binom{-3}{-4} & \binom{-3}{-3} \\
\binom{-2}{-5} & \binom{-2}{-4} & \binom{-2}{-3} & \binom{-2}{-2} \\
\binom{-1}{-5} & \binom{-1}{-4} & \binom{-1}{-3} & \binom{-1}{-2} & \binom{-1}{-1} \\
 & & & & & \binom{0}{0} \\
 & & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
 & & & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
 & & & & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 & & & & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Die Rechenregel

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-k)}$$

gilt auch im negativen Fall:

$$\binom{-n}{-k} = \frac{(-n) \cdot (-n-1) \cdot \cdots \cdot (-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (-n+k)}$$

Rechenbeispiele:

$$\binom{-4}{-5} = \frac{(-4)}{1} = -4$$

$$\binom{-3}{-5} = \frac{(-3)\cdot(-4)}{1\cdot 2} = 6$$

$$\binom{-1}{-5} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 1$$

$$\binom{-5}{-5} = 1 \quad \text{(Definition für } k = n\text{)}$$

Natürlich können die Zahlen des erweiterten Pascal-Dreieckes auch über die gewöhnlichen Pascal-Zahlen berechnet werden:

$$\binom{-n}{-k} = (-1)^{(n+k)}\binom{k-1}{n-1}$$

Leider funktioniert die im klassischen Pascal-Dreieck vorhandene Symmetrie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

im erweiterten Pascal-Dreieck nicht mehr. Es gilt dort eine „vertikale" Symmetrie, bei der auch noch mit wechselnden Vorzeichen gerechnet werden muss:

$$\binom{-n}{-k} = (-1)^{k+1}\binom{n-k-1}{-k} \quad \text{für} \quad n,k \in \mathbf{N}$$

4.2 Binomische Formel

In einem pragmatischen Schulunterricht wird das Pascal-Dreieck über die binomische Formel eingeführt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}a^{n-k}b^k$$

Eigentlich könnten wir wegen $\binom{n}{r} = 0$ für $n > 0$ und $r < 0$ auch schreiben:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{n-k}a^{n-k}b^k$$

Nun wird es spannend. Wenn wir dies übertragen, ergibt sich zum Beispiel:

$$(a+b)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{-3-k}a^{-3-k}b^k$$

also:

$$(a+b)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{-3-k}a^{-3-k}b^k = a^{-3} - 3a^{-4}b + 6a^{-5}b^2 - 10a^{-6}b^3 + 15a^{-7}b^4 - 21a^{-8}b^5 \pm \cdots$$

Wir erhalten eine Reihe.

Kontrollüberlegung: Wenn wir mit $(a+b)^{+3}$, also mit $\left(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right)$ multiplizieren, sollten wir 1 erhalten:

$$\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)\cdot\left(a^{-3}-3a^{-4}b+6a^{-5}b^2-10a^{-6}b^3+15a^{-7}b^4-21a^{-8}b^5\pm\cdots\right)$$

$$\begin{array}{lllllll}
=1 & -3a^{-1}b & 6a^{-2}b^2 & -10a^{-3}b^3 & +15a^{-4}b^4 & -21a^{-5}b^5 & \pm\cdots \\
 & +3a^{-1}b & -9a^{-2}b^2 & +18a^{-3}b^3 & -30a^{-4}b^4 & +45a^{-5}b^5 & -63a^{-6}b^6 \\
 & & 3a^{-2}b^2 & -9a^{-3}b^3 & +18a^{-4}b^4 & -30a^{-5}b^5 & +45a^{-6}b^6 \\
 & & & +a^{-3}b^3 & -3a^{-4}b^4 & +6a^{-5}b^5 & -10a^{-6}b^6 \\
\hline
=1 & +0 & +0 & +0 & +0 & +0 & +\cdots
\end{array}$$

Die Frage der Konvergenz lassen wir hier weg.

4.2.1 Die Nullen

Wir stellen die obige Rechnung schematisch dar:

$$\left(\tbinom{3}{3}a^3+\tbinom{3}{2}a^2b+\tbinom{3}{1}ab^2+\tbinom{3}{0}b^3\right)\cdot\left(\tbinom{-3}{-3}a^{-3}+\tbinom{-3}{-4}a^{-4}b+\tbinom{-3}{-5}a^{-5}b^2+\tbinom{-3}{-6}a^{-6}b^3+\tbinom{-3}{-7}a^{-7}b^4+\tbinom{-3}{-8}a^{-8}b^5\pm\cdots\right)$$

$$\begin{array}{lllllll}
=\tbinom{3}{3}\tbinom{-3}{-3} & +\tbinom{3}{3}\tbinom{-3}{-4}a^{-1}b & +\tbinom{3}{3}\tbinom{-3}{-5}a^{-2}b^2 & +\tbinom{3}{3}\tbinom{-3}{-6}a^{-3}b^3 & +\tbinom{3}{3}\tbinom{-3}{-7}a^{-4}b^4 & +\tbinom{3}{3}\tbinom{-3}{-8}a^{-5}b^5 & +\cdots \\
 & +\tbinom{3}{2}\tbinom{-3}{-3}a^{-1}b & +\tbinom{3}{2}\tbinom{-3}{-4}a^{-2}b^2 & +\tbinom{3}{2}\tbinom{-3}{-5}a^{-3}b^3 & +\tbinom{3}{2}\tbinom{-3}{-6}a^{-4}b^4 & +\tbinom{3}{2}\tbinom{-3}{-7}a^{-5}b^5 & +\tbinom{3}{2}\tbinom{-3}{-8}a^{-6}b^6 \\
 & & +\tbinom{3}{1}\tbinom{-3}{-3}a^{-2}b^2 & +\tbinom{3}{1}\tbinom{-3}{-4}a^{-3}b^3 & +\tbinom{3}{1}\tbinom{-3}{-5}a^{-4}b^4 & +\tbinom{3}{1}\tbinom{-3}{-6}a^{-5}b^5 & +\tbinom{3}{1}\tbinom{-3}{-7}a^{-6}b^6 \\
 & & & +\tbinom{3}{0}\tbinom{-3}{-3}a^{-3}b^3 & +\tbinom{3}{0}\tbinom{-3}{-4}a^{-4}b^4 & +\tbinom{3}{0}\tbinom{-3}{-5}a^{-5}b^5 & +\tbinom{3}{0}\tbinom{-3}{-6}a^{-6}b^6 \\
\hline
=1 & +0 & +0 & +0 & +0 & +0 & +\cdots
\end{array}$$

Wir analysieren die oben erscheinenden Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
&\binom{3}{3}\binom{-3}{-3}=1\\
&\binom{3}{3}\binom{-3}{-4}+\binom{3}{2}\binom{-3}{-3}=0\\
&\binom{3}{3}\binom{-3}{-5}+\binom{3}{2}\binom{-3}{-4}+\binom{3}{1}\binom{-3}{-3}=0\\
&\binom{3}{3}\binom{-3}{-6}+\binom{3}{2}\binom{-3}{-5}+\binom{3}{1}\binom{-3}{-4}+\binom{3}{0}\binom{-3}{-3}=0\\
&\binom{3}{3}\binom{-3}{-7}+\binom{3}{2}\binom{-3}{-6}+\binom{3}{1}\binom{-3}{-5}+\binom{3}{0}\binom{-3}{-4}=0\\
&\binom{3}{3}\binom{-3}{-8}+\binom{3}{2}\binom{-3}{-7}+\binom{3}{1}\binom{-3}{-6}+\binom{3}{0}\binom{-3}{-5}=0
\end{aligned}$$

Offenbar gilt:

$$\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{3-k}\binom{-3}{-3-p+k}=0 \quad \text{für} \quad p\in\mathbf{N}$$

Allgemein gilt:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\binom{-n}{-n-p+k}=0 \quad \text{für} \quad p\in\mathbf{N}$$

Wir werden sehen, dass dies ein Sonderfall der so genannten Vandermondeschen Identität ist.

Wegen

$$\binom{-n}{-k} = (-1)^{(n+k)}\binom{k-1}{n-1}$$

können wir obige Beziehung in gewöhnliche Pascal-Zahlen umschreiben:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{(p-k)}\binom{n}{n-k}\binom{n+p-k-1}{n-1} = 0$$

Rechenbeispiel: $n = 4$, $p = 6$

$$\binom{4}{4}\binom{9}{3}-\binom{4}{1}\binom{8}{3}+\binom{4}{2}\binom{7}{3}-\binom{4}{3}\binom{6}{3}+\binom{4}{4}\binom{5}{3} = 1\cdot 84 - 4\cdot 56 + 6\cdot 35 - 4\cdot 20 + 1\cdot 10$$
$$= 84 - 224 + 210 - 80 + 10 = 0$$

4.2.2 Taylor

Insbesondere ist

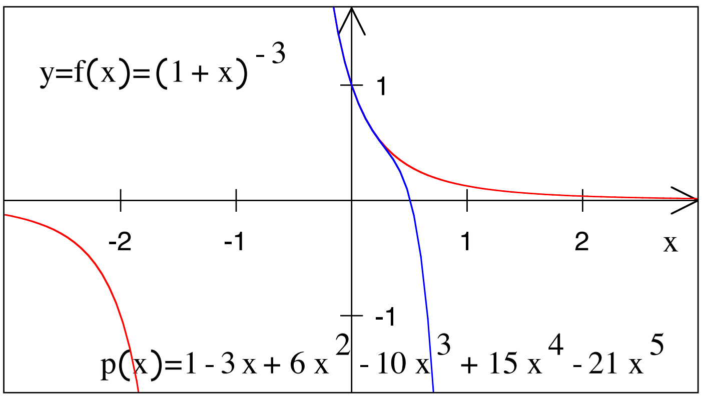
$$f(x) = (1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - 21x^5 \pm \cdots$$

Das ist aber genau die Taylor-Entwicklung der Funktion an der Stelle $x_0 = 0$:

```
> taylor(1/(1+x)^3, x=0, 6);
```

$$1 - 3\,x + 6\,x^2 - 10\,x^3 + 15\,x^4 - 21\,x^5 + \mathrm{O}(x^6)$$

Taylor-Entwicklung



Funktion und polynomiale Approximation

5 Spiel mit Matrizen

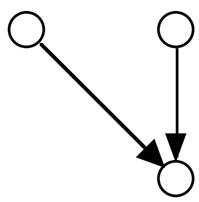
5.1 Die Pascal-Matrix

Es sei P die unendlichen Matrix mit den Binomialkoeffizienten als Elementen. Der Übersichtlichkeit halber werden die Nullen nicht eingetragen. Die Matrix P ist nach rechts und links und nach oben und unten unendlich.

Natürlich kann nur ein endlicher Teil einer solchen Matrix dargestellt werden. Das Orientierungskreuz in den folgenden Darstellungen gibt die Position des Elementes mit der Indizierung 0,0 an; dieses befindet sich rechts unterhalb des Schnittpunktes der beiden Orientierungslinien. Die Elemente in diesem Quadranten haben nicht negative Indizes. Der erste Index läuft, wie bei Matrizen üblich, von oben nach unten, der zweite Index von links nach rechts. Der Quadrant mit den nicht negativen Indizes enthält das klassische Pascal-Dreieck.

$$P = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & & & & & & & & & \\
-4 & 1 & & & & & & & & \\
6 & -3 & 1 & & & & & & & \\
-4 & 3 & -2 & 1 & & & & & & \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & & & & & \\
\hline
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 & & \\
 & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}\right]$$

Die Pascal-Rekursion kann in dieser Matrix-Schreibeweise durch folgendes Schema angedeutet werden:



Pascal-Rekursion

Die Pascal-Rekursion gilt in der gesamten Matrix. Formelmäßig kann diese Rekursion wie folgt geschrieben werden:

$$p_{n,k} = p_{n-1,k-1} + p_{n-1,k}$$

5.2 Produkt zweier Matrizen

Für das Produkt C zweier unendlicher Matrizen A und B gilt die Formel:

$$c_{i,j} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{i,k} b_{k,j}$$

Der Summationsindex k durchläuft die ganzen Zahlen.

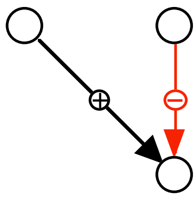
In unseren folgenden Rechnungen ist es so, dass immer nur endlich viele Summanden von Null verschieden sind. Wir brauchen uns daher nicht um Konvergenzfagen zu kümmern.

5.3 Inverse Pascal-Matrix

Die Matrix P hat die inverse Matrix P^{-1}:

$$P^{-1}=\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 &&&&&&&&& \\
4 & 1 &&&&&&&& \\
6 & 3 & 1 &&&&&&& \\
4 & 3 & 2 & 1 &&&&&& \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 &&&&& \\
\hline
&&&&& 1 &&&& \\
&&&&& -1 & 1 &&& \\
&&&&& 1 & -2 & 1 && \\
&&&&& -1 & 3 & -3 & 1 & \\
&&&&& 1 & -4 & 6 & -4 & 1
\end{array}\right]$$

Offenbar ist P^{-1} die an der Nebendiagonalen gespiegelte Matrix P.
Die Pascal-Rekursion gilt in dieser Matrix nicht. Hingegen gilt die folgende modifizierte Rekursion:



Modifizierte Rekursion

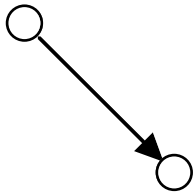
Formelmäßig: $q_{n,k}=q_{n-1,k-1}-q_{n-1,k}$. Diese Rekursion gilt in der gesamten inversen Matrix.

Selbstverständlich ergibt das Produkt von P und P^{-1} die Einheitsmatrix:

$$P\,P^{-1}=P^{0}=\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 &&&&&&&&& \\
& 1 &&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&& \\
&&& 1 &&&&&& \\
&&&& 1 &&&&& \\
\hline
&&&&& 1 &&&& \\
&&&&&& 1 &&& \\
&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&& 1 & \\
&&&&&&&&& 1
\end{array}\right]$$

Einheitsmatrix

Die zur Einheitsmatrix passende und überall gültige Rekursion ist etwas langweilig:



Rekursion

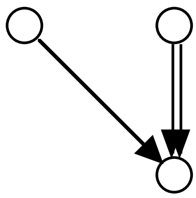
Formelmäßig: $e_{n,k} = e_{n-1,k-1}$

5.4 Quadrat der Pascal-Matrix

Es ist:

$$P^2 = \left[\begin{array}{rrrrr|rrrrr} 1 &&&&&&&&& \\ -8 & 1 &&&&&&&& \\ 24 & -6 & 1 &&&&&&& \\ -32 & 12 & -4 & 1 &&&&&& \\ 16 & -8 & 4 & -2 & 1 &&&&& \\ \hline &&&&& 1 &&&& \\ &&&&& 2 & 1 &&& \\ &&&&& 4 & 4 & 1 && \\ &&&&& 8 & 12 & 6 & 1 & \\ &&&&& 16 & 32 & 24 & 8 & 1 \end{array}\right]$$

Diese Matrix hat die Rekursion:



Rekursion

Formel: $b_{n,k} = b_{n-1,k-1} + 2b_{n-1,k}$

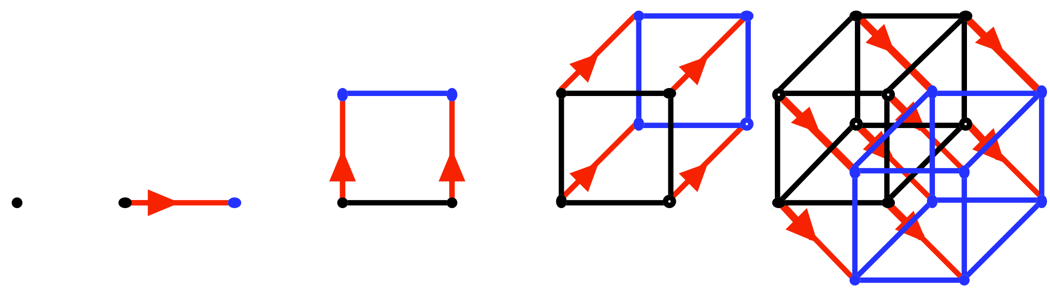
Der „positive“ Teil der Matrix lässt eine geometrische Interpretation über mehrdimensionale Würfel zu:

5.4.1 Am Anfang war der Punkt

Im Johannes-Evangelium steht: *Im Anfang war das Wort*. (Joh. 1,1)

Wir holen Anlauf bei den bekannten Dimensionen, um den Sprung ins Unbekannte zu schaffen. Dazu beginnen wir mit dem Nulldimensionalen, dem Punkt. Der Punkt spielt die Rolle eines Startwertes, der von Außen gegeben wird.

Dann verschieben wir den Punkt um eine Einheit nach rechts. Wenn wir uns den Punkt wie Max und Moritz im Teig vorstellen, dann zieht er Fäden: Die ursprüngliche Lage des Punktes und seine Verschiebungsbahn zusammen mit der Endlage bilden das eindimensionale Analogon zum Würfel, die Strecke (vgl. [Coxeter 1973] S. 123).



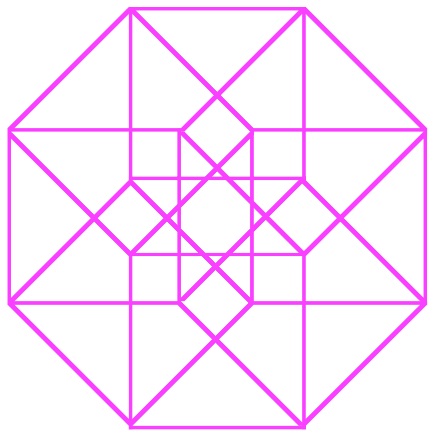
Vom Punkt zum vierdimensionalen Hyperwürfel

Nun lässt sich diese Strecke nach Art eines Scheibenwischers um eine Einheit nach oben schieben. Damit entsteht ein Quadrat.

5.4.2 Von jetzt an wird geschummelt

Im dreidimensionalen Raum müsste nun das Quadrat um eine Einheit nach hinten oder nach vorn verschoben werden, um den Würfel zu erhalten. Da der Lebensraum eines Schulmeisters, die Wandtafel, aber zweidimensional ist, kann dies nicht so gezeichnet werden. Man behilft sich mit einem betrügerischen Trick: Man schiebt um eine Einheit nach rechts oben. Schülerinnen und Schüler sind aufgrund ihrer langjährigen Konditionierung mit Schrägbildern bereit, das Resultat als Würfel anzusehen. Gelegentlich wird die fehlende Verkürzung nach hinten kritisiert, aber auch dann hätten wir ein Schrägbild, das kein „echtes" Bild eines Würfels sein kann. Wir schummeln.

Was hindert uns nun, weiter zu schummeln? Wir verschieben die Figur um eine Einheit nach rechts unten und erhalten ein Bild des vierdimensionalen Hyperwürfels.



Vierdimensionaler Hyperwürfel

5.4.3 Abzählen der Bauelemente

Wir zählen nun die Bauteile in verschiedenen Dimensionen ab. So besteht beispielsweise die Strecke aus zwei Punkten und einer Strecke, das Quadrat aus vier Punkten, vier Strecken und dem Quadrat selber.

Dimension	Punkte (Ecken)	Strecken (Kanten)	Quadrate (Flächen)	Würfel	4d Hyper-Würfel	5d Hyper-Würfel
0	1					
1	2	1				
2	4	4	1			
3	8	12	6	1		
4	16	32	24	8	1	
5	32	80	80	40	10	1

Anzahl der Bauteile

Beim vierdimensionalen Hyperwürfel lassen sich die Ecken einfach auszählen, zumal sich die Eckenzahl mit jeder Dimension verdoppelt. Das Auszählen der Strecken ist eine Fleißarbeit; bei den Quadraten ist störend, dass in unserem betrügerischen Bild viele Quadrate als Rhomben erscheinen. Das Auszählen der dreidimensionalen Würfel ist eine gute Übung im Mustererkennen.

In der Tabelle lässt sich ein Rekursionsmuster erkennen: Jede Zahl ist die Summe des Zweifachen der Zahl unmittelbar oberhalb plus der Zahl unmittelbar links oben. Lediglich die oberste Eins tanzt aus der Reihe. Aber eben: Am Anfang war der Punkt.

Die Richtigkeit dieser Rekursion lässt sich so einsehen: Die sechs Seitenquadrate des Würfels beispielsweise entstehen durch das ursprüngliche Frontquadrat sowie die nach hinten verschobene Kopie. Weiter hinterlassen die vier Seiten des Frontquadrates beim Verschieben je eine Spur, welche das Boden- und Deckquadrat sowie die beiden Seitenquadrate links und rechts ergeben.

Somit kann die Tabelle für beliebig hohe Dimensionen weitergeführt werden.

Diese Bauteil-Tabelle ist offensichtlich der „positive" Quadrant der Matrix P^2. Es ist der Phantasie der Leserin überlassen, diese Interpretation in negative Dimensionen weiterzuführen.

5.5 Allgemeine Potenz der Pascal-Matrix

Offenbar genügt die Matrix P^z der Rekursion $a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + z a_{n-1,k}$. Dazu das Beispiel für $z = -3$.

$$P^{-3} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 &&&&&&&&& \\
12 & 1 &&&&&&&& \\
54 & 9 & 1 &&&&&&& \\
108 & 27 & 6 & 1 &&&&&& \\
81 & 27 & 9 & 3 & 1 &&&&& \\
\hline
&&&&& 1 &&&& \\
&&&&& -3 & 1 &&& \\
&&&&& 9 & -6 & 1 && \\
&&&&& -27 & 27 & -9 & 1 & \\
&&&&& 81 & -108 & 54 & -12 & 1
\end{array}\right]$$

Beispiel

5.5.1 Link mit Fibonacci

$$P^{-3} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 &&&&&&&&& \\
12 & 1 &&&&&&&& \\
54 & 9 & 1 &&&&&&& \\
108 & 27 & 6 & 1 &&&&&& \\
81 & 27 & 9 & 3 & 1 &&&&& \\
\hline
&&&&& 1 &&&& \\
&&&&& -3 & 1 &&& \\
&&&&& 9 & -6 & 1 && \\
&&&&& -27 & 27 & -9 & 1 & \\
&&&&& 81 & -108 & 54 & -12 & 1
\end{array}\right]$$

109 33 10 3 1 0 1 −3 10 −33 109

Wenn wir im Beispiel P^{-3} die Schrägzeilensummen (parallel zur Nebendiagonale der Matrix) bilden, erhalten wir die Folge:

33 10 3 1 0 1 −3 10 −33

Hier gilt die Rekursion: $g_{n+2} = -3g_{n+1} + g_n$. Allgemein gilt in unserem Kontext die Rekursion: $g_{n+2} = z g_{n+1} + g_n$

5.6 Verschieben der Indizierung

Da unsere Matrizen mit ganzen Zahlen indiziert sind, gibt es keinen natürlichen Nullpunkt. Wir können den ersten oder den zweiten oder beide Inidizes je mit einer additiven Konstanten versehen. Als Beispiel zwei verschiedene Indizierungen derselben Matrix.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 &&&&&&& \\ 3 & 1 &&&&&& \\ 3 & 2 & 1 &&&&& \\ 1 & 1 & 1 & 1 &&&& \\ \hline &&&& 1 &&& \\ &&&& -1 & 1 && \\ &&&& 1 & -2 & 1 & \\ &&&& -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \overset{?}{=} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 1 &&&&&& \\ 3 & 2 & 1 &&&&& \\ 1 & 1 & 1 & 1 &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ \hline &&&& -1 & 1 && \\ &&&& 1 & -2 & 1 & \\ &&&& -1 & 3 & -3 & 1 \\ &&&& 1 & -4 & 6 & -4 \end{array}\right]$$

Wir haben links die Matrix P^{-1}, rechts sind die Elemente eine Zeile nach oben verschoben; die ersten Indizes sind um eins reduziert worden.

Diese Matrix ist nicht mehr die Inverse zur Matrix P. Die Kontrollrechung durch Multiplikation mit P ergibt:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 &&&&&&& \\ -3 & 1 &&&&&& \\ 3 & -2 & 1 &&&&& \\ -1 & 1 & -1 & 1 &&&& \\ \hline &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 & 1 && \\ &&&& 1 & 2 & 1 & \\ &&&& 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 1 &&&&&& \\ 3 & 2 & 1 &&&&& \\ 1 & 1 & 1 & 1 &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ \hline &&&& -1 & 1 && \\ &&&& 1 & -2 & 1 & \\ &&&& -1 & 3 & -3 & 1 \\ &&&& 1 & -4 & 6 & -4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 &&&&&& \\ & -1 & 1 &&&&& \\ && -1 & 1 &&&& \\ &&& -1 & 1 &&& \\ \hline &&&& -1 & 1 && \\ &&&& & -1 & 1 & \\ &&&& && -1 & 1 \\ &&&& &&& -1 \end{array}\right]$$

Es erscheint eine „verschmierte“ Einheitsmatrix.

Wenn wir gar drei Zeilen nach oben schieben, ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 &&&&&&& \\ -3 & 1 &&&&&& \\ 3 & -2 & 1 &&&&& \\ -1 & 1 & -1 & 1 &&&& \\ \hline &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 & 1 && \\ &&&& 1 & 2 & 1 & \\ &&&& 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ &&&& -1 & 1 && \\ &&&& 1 & -2 & 1 & \\ \hline &&&& -1 & 3 & -3 & 1 \\ &&&& 1 & -4 & 6 & -4 \\ &&&& -1 & 5 & -10 & 10 \\ &&&& 1 & -6 & 15 & -20 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 3 & -3 & 1 &&&& \\ & -1 & 3 & -3 & 1 &&& \\ && -1 & 3 & -3 & 1 && \\ &&& -1 & 3 & -3 & 1 & \\ \hline &&&& -1 & 3 & -3 & 1 \\ &&&& & -1 & 3 & -3 \\ &&&& && -1 & 3 \\ &&&& &&& -1 \end{array}\right]$$

In der Diagonalen erscheinen die Elemente der Spalte mit der Nummer (–4) der Pascal-Matrix.

Wenn wir umgekehrt eine Zeile nach unten schieben, erhalten wir:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 &&&&&&& \\ -3 & 1 &&&&&& \\ 3 & -2 & 1 &&&&& \\ -1 & 1 & -1 & 1 &&&& \\ \hline &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 & 1 && \\ &&&& 1 & 2 & 1 & \\ &&&& 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc|cccc} &&&&&&& \\ 1 &&&&&&& \\ 3 & 1 &&&&&& \\ 3 & 2 & 1 &&&&& \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ &&&& -1 & 1 && \\ &&&& 1 & -2 & 1 & \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc|cccc} &&&&&&& \\ 1 &&&&&&& \\ 1 & 1 &&&&&& \\ 1 & 1 & 1 &&&&& \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 &&&& \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 &&& \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 && \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}\right]$$

Eine Struktur ist noch nicht erkennbar. Wenn wir zwei Zeilen nach unten schieben, erhalten wir:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 &&&&&&& \\ -3 & 1 &&&&&& \\ 3 & -2 & 1 &&&&& \\ -1 & 1 & -1 & 1 &&&& \\ \hline &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 & 1 && \\ &&&& 1 & 2 & 1 & \\ &&&& 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc|cccc} &&&&&&& \\ &&&&&&& \\ 1 &&&&&&& \\ 3 & 1 &&&&&& \\ \hline 3 & 2 & 1 &&&&& \\ 1 & 1 & 1 & 1 &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ &&&& -1 & 1 && \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc|cccc} &&&&&&& \\ &&&&&&& \\ 1 &&&&&&& \\ 2 & 1 &&&&&& \\ \hline 3 & 2 & 1 &&&&& \\ 4 & 3 & 2 & 1 &&&& \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 &&& \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 && \end{array}\right]$$

Wenn wir drei Zeilen nach unten schieben, erhalten wir:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 &&&&&&& \\ -3 & 1 &&&&&& \\ 3 & -2 & 1 &&&&& \\ -1 & 1 & -1 & 1 &&&& \\ \hline &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 & 1 && \\ &&&& 1 & 2 & 1 & \\ &&&& 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc|cccc} &&&&&&& \\ &&&&&&& \\ &&&&&&& \\ 1 &&&&&&& \\ \hline 3 & 1 &&&&&& \\ 3 & 2 & 1 &&&&& \\ 1 & 1 & 1 & 1 &&&& \\ &&&& 1 &&& \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc|cccc} &&&&&&& \\ &&&&&&& \\ &&&&&&& \\ 1 &&&&&&& \\ \hline 3 & 1 &&&&&& \\ 6 & 3 & 1 &&&&& \\ 10 & 6 & 3 & 1 &&&& \\ 15 & 10 & 6 & 3 & 1 &&& \end{array}\right]$$

Die Spalten entsprechen offenbar der dritten Spalte (mit dem Spaltenindex 2) der Pascal-Matrix.

Verschiebungen nach links oder nach rechts führen nicht wesentlich zu neuen Matrizen, lediglich die Indizierung ändert sich.

5.7 Eine Identität

Obige Resultate geben Anlass zu Identitäten, welche sich allgemein unter folgender Formel zusammenfassen lassen:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{n+m}{p}$$

Diese Formel heißt Vandermondesche Identität (Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735-1796) (vgl. [Cohen 1978], p. 31). Am einfachsten beweist man sie, wenn man sich überlegt, wie aus einer Menge von n Frauen und m Männern eine Teilemenge von p Personen ausgewählt werden kann: Für eine spezielle Auswahl von k Frauen und $p-k$ Männern gibt es $\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es $\binom{n+m}{p}$ Möglichkeiten.

Rechenbeispiele bei unseren Matrizen:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 &&&&&&& \\
-3 & 1 &&&&&& \\
3 & -2 & 1 &&&&& \\
-1 & 1 & -1 & 1 &&&& \\ \hline
&&&& 1 &&& \\
&&&& 1 & 1 && \\
&&&& 1 & 2 & 1 & \\
&&&& 1 & 3 & 3 & 1
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 1 &&&& \\
&&&& 1 &&& \\
&&&& -1 & 1 && \\
&&&& 1 & -2 & 1 & \\ \hline
&&&& -1 & 3 & -3 & 1 \\
&&&& 1 & -4 & 6 & -4 \\
&&&& -1 & 5 & -10 & 10 \\
&&&& 1 & -6 & 15 & -20
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
-1 & 3 & -3 & 1 &&&& \\
& -1 & 3 & -3 & 1 &&& \\
&& -1 & 3 & -3 & 1 && \\
&&& -1 & 3 & -3 & 1 & \\ \hline
&&&& -1 & 3 & -3 & 1 \\
&&&&& -1 & 3 & -3 \\
&&&&&& -1 & 3 \\
&&&&&&& -1
\end{array}\right]$$

Rechenbeispiel 1

Das grafisch angedeutete Rechenbeispiel 1 lautet formal:

$$\binom{2}{0}\binom{-4}{-4}+\binom{2}{1}\binom{-4}{-5}+\binom{2}{2}\binom{-4}{-6}=1\cdot 1+2\cdot(-4)+1\cdot 10=1-8+10=3=\binom{-2}{-4}$$

Hier ist $n=2$, $m=-4$ und $p=-4$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 &&&&&&& \\
-3 & 1 &&&&&& \\
3 & -2 & 1 &&&&& \\
-1 & 1 & -1 & 1 &&&& \\ \hline
&&&& 1 &&& \\
&&&& 1 & 1 && \\
&&&& 1 & 2 & 1 & \\
&&&&&&&
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
&&&&&&& \\
&&&&&&& \\
&&&&&&& \\
1 &&&&&&& \\ \hline
3 &&&&&&& \\
3 && 1 &&&&& \\
1 && 1 & 1 &&&& \\
&&&& 1 &&&
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
&&&&&&& \\
&&&&&&& \\
&&&&&&& \\
1 &&&&&&& \\ \hline
3 & 1 &&&&&& \\
6 & 3 & 1 &&&&& \\
10 & 6 & 3 & 1 &&&& \\
15 & & 6 & 3 & 1 &&&
\end{array}\right]$$

Rechenbeispiel 2

Das grafisch angedeutete Rechenbeispiel 2 lautet formal:

$$\binom{3}{0}\binom{2}{2}+\binom{3}{1}\binom{2}{1}+\binom{3}{2}\binom{2}{0}=1\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 1=1+6+3=10=\binom{5}{2}$$

Hier ist $n=3$, $m=2$ und $p=2$.

Wir hatten weiter oben die Identität

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\binom{-n}{-n-p+k}=0 \quad \text{für} \quad p\in\mathbf{N}$$

gefunden. Mit der Indexänderung $r=n-k$ kann die linke Seite wie folgt umgeformt werden:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\binom{-n}{-n-p+k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\binom{n}{n-k}\binom{-n}{-n-p+k}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\binom{n}{r}\binom{-n}{-p-r} \quad \text{für} \quad p\in\mathbf{N}$$

Auf Grund der Identität von Vandermonde erhalten wir:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\binom{-n}{-n-p+k}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\binom{n}{r}\binom{-n}{-p-r}=\binom{n-n}{-p}=\binom{0}{-p}=0 \quad \text{für} \quad p\in\mathbf{N}$$

Literatur

[Cohen 1978] Cohen, Daniel I.A.: Basic Techniques of Combinatorial Theory. New York: Wiley 1978. ISBN 0-471-03535-1

[Coxeter 1973] Coxeter, H.S.M.: Regular Polytopes. Third Edition. New York: Dover 1973. ISBN 0-486-61480-8

[Hilton/Holton/Pedersen 1998] Hilton, Peter / Holton, Derek / Pedersen, Jean: Mathematical Reflections: In a Room with Many Mirrors. 2nd printing. New York: Springer 1998.

[Hilton/Holton/Pedersen 2002] Hilton, Peter / Holton, Derek / Pedersen, Jean: Mathematical Vistas: From a Room with Many Mirrors. New York: Springer 2002.