Hans Walser, [20150407]

Orthogramm

Anregung: R. O., A.

1 In der Ebene

1.1 Definitionen

Orthopez: Viereck, bei welchem zwei gegenüberliegende Seiten orthogonal sind (Abb. 1)

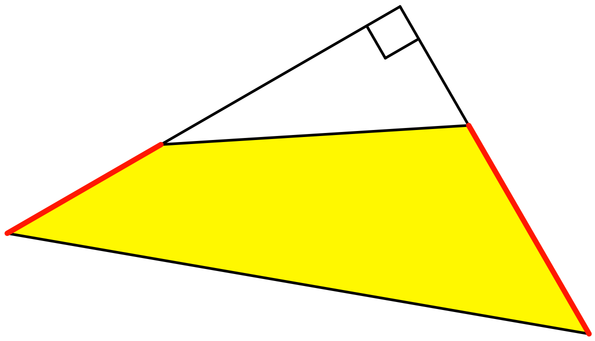

Abb. 1: Orthopez

Orthogramm (in der Ebene): Viereck mit orthogonalen gegenüberliegenden Seiten (Abb. 2)

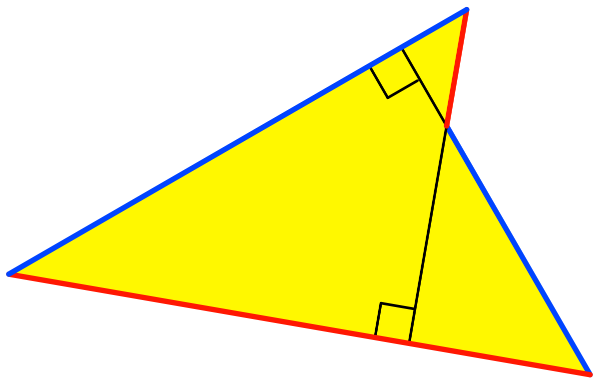

Abb. 2: Orthogramm

1.2 Sätze

Satz 1: In einem Orthopez ist die Summe der Quadrate der beiden nicht orthogonalen Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen.

Für den Beweis verwenden wir die Bezeichnungen der Abbildung 3.

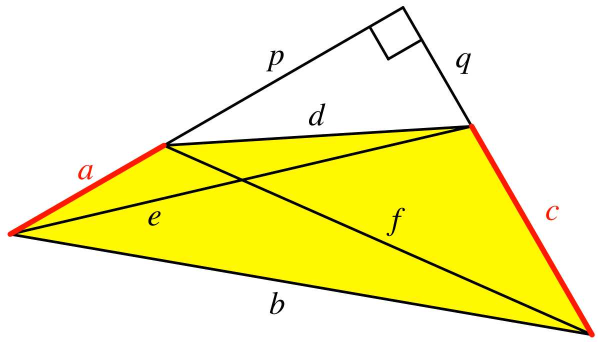

Abb. 3: Bezeichnungen

Es ist:

$$\left.\begin{array}{l} b^2+d^2=(a+p)^2+(c+q)^2+p^2+q^2 \\ e^2+f^2=(a+p)^2+q^2+p^2+(c+q)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b^2+d^2=e^2+f^2$$

Satz 2: Einem beliebigen Dreieck kann auf drei Arten ein Orthogramm einbeschrieben werden (Abb. 4).

Dabei kommen die Höhen ins Spiel.

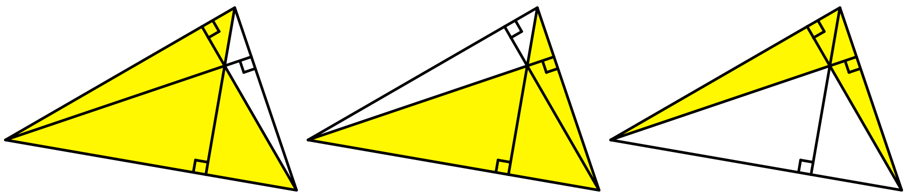

Abb. 4: Orthogramme im Dreieck

Satz 3: Die Diagonalen eines Orthogrammes sind orthogonal.

Dies ergibt sich unmittelbar aus der Abbildung 4. Hintergrund: Höhenschnittpunkt.

Satz 4: Ein Orthopez mit orthogonalen Diagonalen ist ein Orthogramm.

Ergibt sich aus der Abbildung 4.

Wegen Satz 3 können die Eigenschaften eines Viereckes mit orthogonalen Diagonalen auf Orthogramme übertragen werden.

Da in einem Viereck mit orthogonalen Diagonalen die Summe der Quadrate gegenüberliegender Seiten konstant ist, erhalten wir den folgenden Satz 5.

Dazu verwenden wir folgende Bezeichnungen im Dreieck (Standard): Seiten a, b, c. Höhen: h_a, h_b, h_c. Winkel: α, β, γ. Höhenabschnitte vom Höhenschnittpunkt bis zu den Ecken: $\hat{h}_a, \hat{h}_b, \hat{h}_c$.

Satz 5: In einem beliebigen Dreieck gilt:

$$a^2+\hat{h}_a^2=b^2+\hat{h}_b^2=c^2+\hat{h}_c^2$$

Die bildliche Darstellung macht Probleme mit Überlagerungen. In der Abbildung 5 gilt die RGB-Konvention:

Gelb = Überlagerung von Rot und Grün

Zyan = Überlagerung von Grün und Blau
Magenta = Überlagerung von Blau und Rot

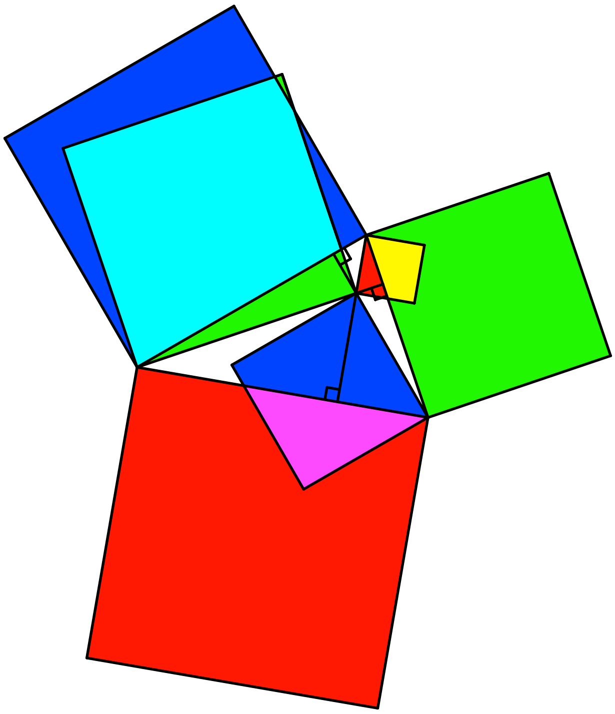

Abb. 5: Rot = Grün = Blau

Wenn wir mit geeigneten kleineren Figuren arbeiten, entfällt das Überlagerungsproblem (Abb. 6).

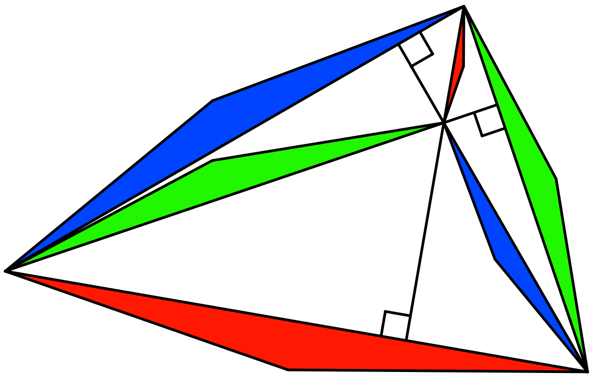

Abb. 6: Rot = Grün = Blau

Sonderfall: Für $\gamma = 90°$ wird $\hat{h}_a = b$, $\hat{h}_b = a$ und $\hat{h}_c = 0$. Damit erhalten wir aus Satz 4:

$$a^2 + b^2 = b^2 + a^2 = c^2 + 0^2$$

Das kommt uns bekannt vor.

2 Im Raum

2.1 Analogon zum Orthopez

Als Analogon zu einem Orthopez kann im Raum ein Tetraeder mit zwei orthogonalen gegenüberliegenden Kanten dienen (Abb. 7).

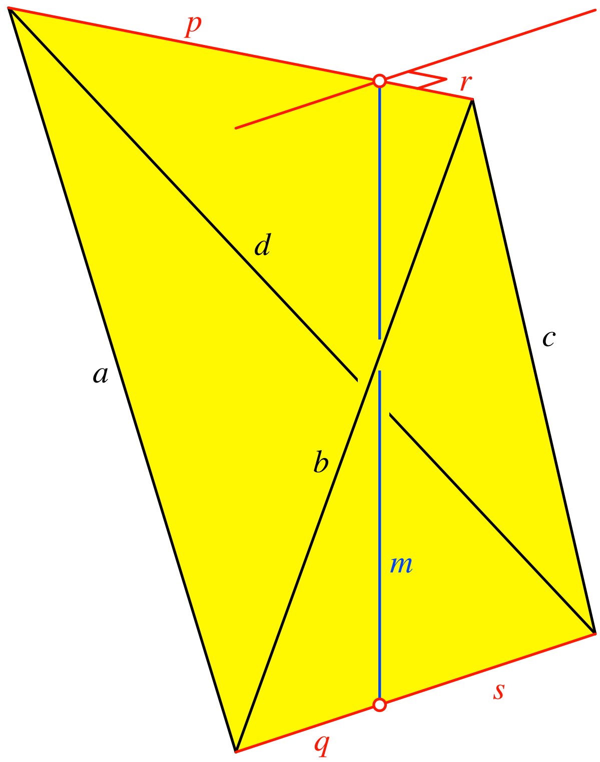

Abb. 7: Analogon zum Orthopez

Satz 6: In einem Tetraeder mit zwei orthogonalen gegenüberliegenden Kanten ist die Summe der Quadrate der übrigen gegenüberliegenden Kante konstant.

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung 7. Dabei ist m die Minimaltransversale der beiden orthogonalen Kanten. Mit dem räumlichen Pythagoras erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} a^2+c^2=\left(p^2+m^2+q^2\right)+\left(r^2+m^2+s^2\right) \\ b^2+d^2=\left(r^2+m^2+q^2\right)+\left(p^2+m^2+s^2\right) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a^2+c^2=b^2+d^2$$

2.2 Analogon zum Orthogramm

Orthogramm (im Raum): Tetraeder mit orthogonalen gegenüberliegenden Kanten.

Wir verwenden auch im Raum die Bezeichnung Orthogramm und hoffen dass das keine Verwirrung stiftet

Beispiel: Reguläres Tetraeder

2.3 Konstruktion

Wir können ein Orthogramm im Raum wie folgt konstruieren. In der Bodenebene zeichnen wir ein beliebiges Dreieck (die zukünftige Grundfläche einer Dreikant-Pyramide) mit Höhen und Höhenschnittpunkt. Im Höhenschnittpunkt fahren wir senkrecht zur Bodenebene hinauf und wählen auf dieser Senkrechten einen Punkt als Pyramidenspitze (Abb. 8).

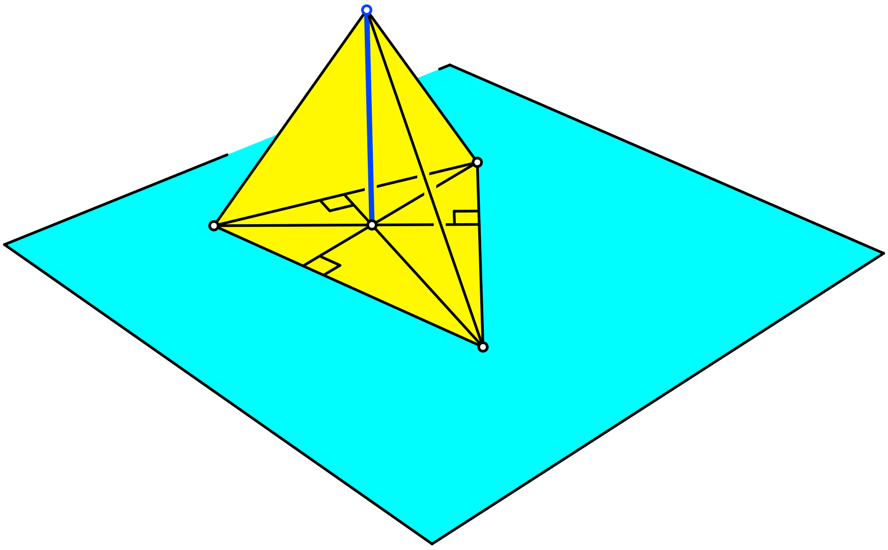

Abb. 8: Orthogramm im Raum

2.4 Sätze

Satz 7: Sind in einem Tetraeder zwei Paare gegenüberliegender Kanten orthogonal, dann auch das dritte Paar. Das Tetraeder ist ein Orthogramm.

(1) Beweis durch Raumvorstellung. Wichtig ist der Sachverhalt, dass sich im Basisdreieck *ABC* die drei Höhen in einem Punkt schneiden.

(2) Beweis mit Vektorrechnung. Bezeichnungen gemäß Abbildung 9.

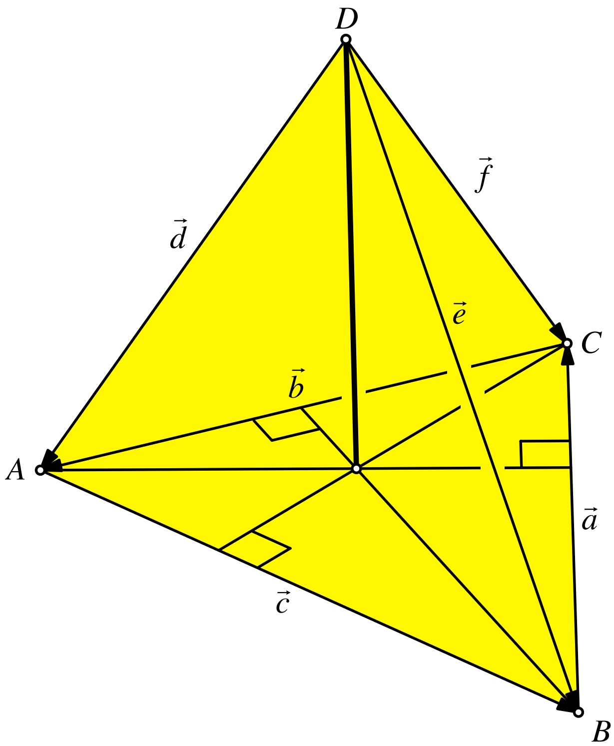

Abb. 9: Bezeichnungen

I) $\vec{a} \perp \vec{d} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\vec{d} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{f} - \vec{e}\right)\vec{d} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{d}\vec{e} = \vec{d}\vec{f}$

II) $\vec{b} \perp \vec{e} \quad \Rightarrow \quad \vec{b}\vec{e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{d} - \vec{f}\right)\vec{e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{d}\vec{e} = \vec{e}\vec{f}$

Somit ist $\vec{d}\vec{e} = \vec{d}\vec{f} = \vec{e}\vec{f}$ und weiter:

$$\vec{d}\vec{f} = \vec{e}\vec{f} \quad \Rightarrow \quad \vec{e}\vec{f} - \vec{d}\vec{f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{e} - \vec{d}\right)\vec{f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{c}\vec{f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \perp \vec{f}$$

Für ein Tetraeder sind also folgende Fälle möglich:

a) Keine orthogonalen gegenüberliegenden Kanten

b) Genau ein Paar orthogonaler gegenüberliegender Kanten

c) Alle drei Paare gegenüberliegender Kanten sind orthogonal

Der Fall mit genau zwei Paaren orthogonaler gegenüberliegender Kanten ist nicht möglich. Wir haben also eine analoge Situation wie bei den Symmetrieachsen eines Dreieckes. Ein Dreieck hat entweder keine oder eine oder dann drei Symmetrieachsen. Genau zwei Symmetrieachsen sind nicht möglich.

Satz 8: In einem räumlichen Orthogramm ist die Summe der Quadrate gegenüberliegender Kanten konstant.

Beweise:

(1) Lässt sich aus Satz 5 herleiten. Es muss zusätzlich das Quadrat der Pyramidenhöhe (gemäß Abb. 8 oder 9) berücksichtigt werden. Dieses Quadrat fällt aber am Schluss aus der Gleichung heraus.

(2) Folgt aus Satz 6.

(3) Beweis mit Vektorrechnung: Wir verwenden wieder die Bezeichnungen der Abbildung 9. Es ist:

$$\vec{a}^2 + \vec{d}^2 = \left(\vec{f} - \vec{e}\right)^2 + \vec{d}^2 = \vec{d}^2 + \vec{e}^2 + \vec{f}^2 - 2\vec{e}\vec{f}$$

$$\vec{b}^2 + \vec{e}^2 = \left(\vec{d} - \vec{f}\right)^2 + \vec{e}^2 = \vec{d}^2 + \vec{e}^2 + \vec{f}^2 - 2\vec{d}\vec{f}$$

$$\vec{c}^2 + \vec{f}^2 = \left(\vec{e} - \vec{d}\right)^2 + \vec{f}^2 = \vec{d}^2 + \vec{e}^2 + \vec{f}^2 - 2\vec{d}\vec{e}$$

Wegen $\vec{d}\vec{e} = \vec{d}\vec{f} = \vec{e}\vec{f}$ sind die drei Summen gleich.

Satz 9: Das Orthogramm hat einen Höhenschnittpunkt.

Einsicht durch Raumvorstellung.

Mit 3d-DGS verifiziert. Es ist zu beachten, dass ein beliebiges Tetraeder *keinen* Höhenschnittpunkt hat.

In der Abbildung 10 sind zunächst nur die Höhen der Seitendreiecke des Orthogramms eingezeichnet (zyan). Zwei benachbarte Dreiecke haben auf ihrer gemeinsamen Kante denselben Höhenfußpunkt. Die dort zusammenlaufenden beiden Seitenflächenhöhen definieren eine Orthogonalebene zur gemeinsamen Kante. Die zu dieser Kante gegenüberliegende Kante liegt in dieser Orthogonalebene.

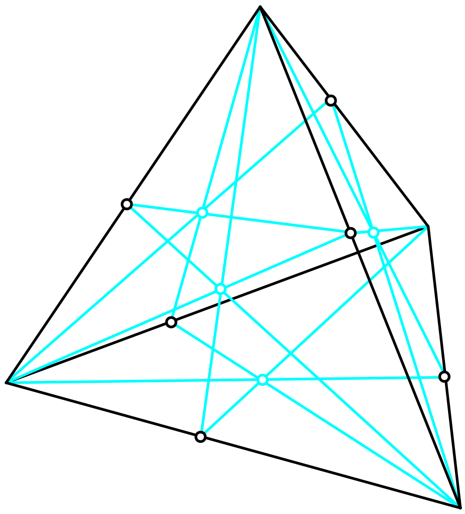

Abb. 10: Höhend der Seitendreiecke

In der Abbildung 11 sind zusätzlich die Höhen des Orthogramms und ihr Schnittpunkt eingezeichnet (blau).

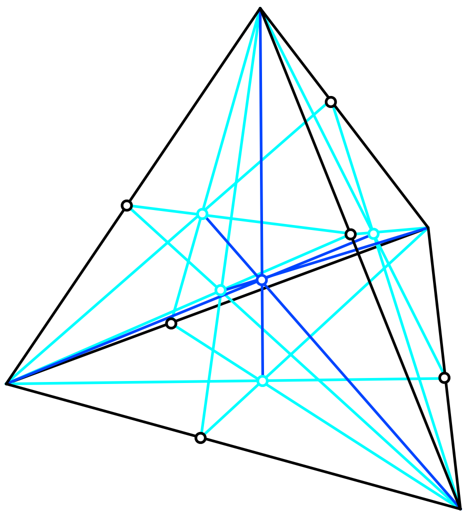

Abb. 11: Höhen

Satz 10: In einem räumlichen Orthogramm schneiden sich die drei Minimaltransversalen gegenüberliegender Kanten ebenfalls im Höhenschnittpunkt.

Einsicht durch Raumvorstellung.

Mit 3d-DGS verifiziert. Es ist zu beachten, dass in einem beliebigen Tetraeder die drei Minimaltransversalen gegenüberliegender Kanten keinen Punkt gemeinsam haben.

In der Abbildung 12 sind die Minimaltransversalen eingezeichnet (rot). Sie laufen von den Fußpunkten der Seitenflächenhöhen aus.

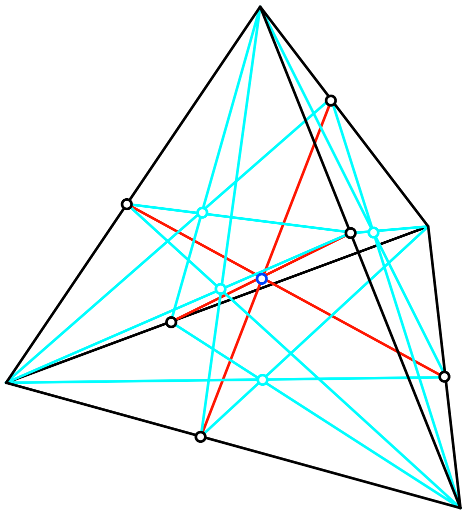

Abb. 12: Minimaltransversalen