Hans Walser, [20180702]

Orthogonaltransversalen

1 Problemstellung

Zu den beiden Parabeln (Abb. 1)

$$p: \quad y = \tfrac{1}{4}x^2 \quad , \quad q: \quad y = x^2 + 3 \tag{1}$$

suchen wir die Orthogonaltransversalen, also Geraden, welche beide Parabeln rechtwinklig schneiden.

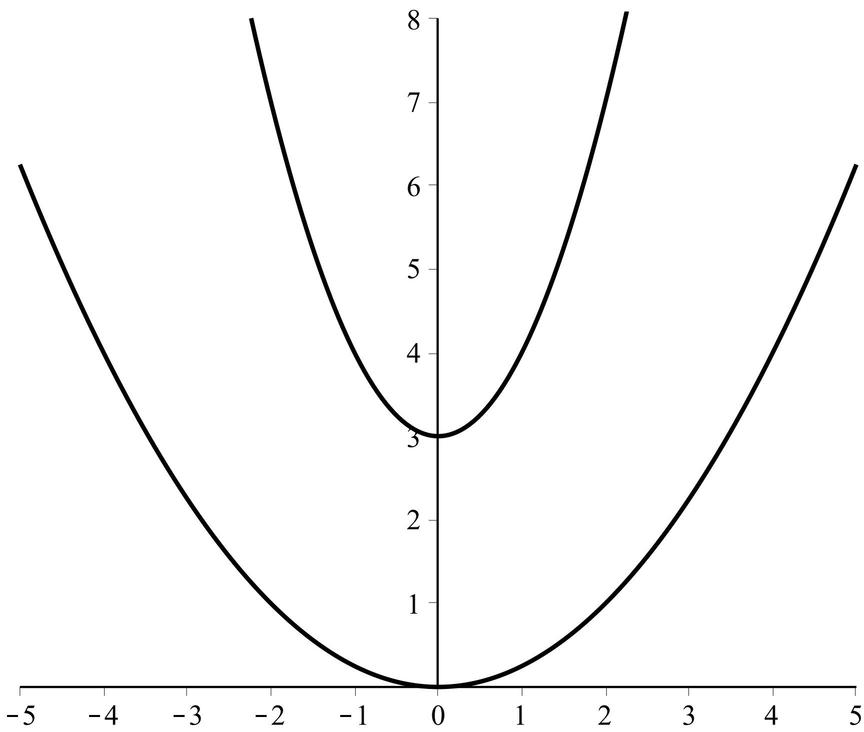

Abb. 1: Die beiden Parabeln

2 Bearbeitung

Eine triviale Lösung ist die Gerade durch die beiden Scheitelpunkte.

Für weitere Lösungen wählen wir auf der Parabel p einen allgemeinen Punkt $P\left(s, \tfrac{1}{4}s^2\right)$ und auf der Parabel q einen allgemeinen Punkt $Q\left(t, t^2+3\right)$.

Für Orthognaltransversalen PQ gilt die Extremaleigenschaft:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(t-s)^2 + \left(t^2 + 3 - \tfrac{1}{4}s^2\right)^2} \overset{!}{=} \text{extremal} \tag{2}$$

Dabei genügt es, dass der Radikand

$$f(s,t) = (t-s)^2 + \left(t^2 + 3 - \tfrac{1}{4}s^2\right)^2 \tag{3}$$

extremal wird. Wir erhalten die beiden Bedingungen:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial s} &= -2(t-s) + 2\left(t^2 + 3 - \tfrac{1}{4}s^2\right)\left(-\tfrac{1}{2}s\right) = 0 \\ \tfrac{\partial f}{\partial t} &= 2(t-s) + 2\left(t^2 + 3 - \tfrac{1}{4}s^2\right)(2t) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Eine triviale Lösung ist $s = t = 0$. Dies liefert die Gerade durch die beiden Scheitelpunkte.
Eine weitere Lösung erhalten wir für $s = t$ (dann verschwindet die erste Klammer in (4) und zusätzlich:

$$\left(t^2 + 3 - \tfrac{1}{4}s^2\right) = 0, \quad \text{also} \quad \tfrac{3}{4}s^2 + 3 = 0 \tag{5}$$

Dies ergibt die imaginäre Lösung $s = \pm 2\mathrm{i}, t = \pm 2\mathrm{i}$.
Für die weiteren Lösungen erhalten wir durch Vergleich der beiden Zeilen in (4):

$$\tfrac{1}{2}s = 2t \quad \Rightarrow \quad t = \tfrac{1}{4}s \tag{6}$$

Einsetzen in die erste Zeile von (4) liefert zunächst:

$$-2\left(\tfrac{1}{4}s - s\right) + 2\left(\left(\tfrac{1}{4}s\right)^2 + 3 - \tfrac{1}{4}s^2\right)\left(-\tfrac{1}{2}s\right) = 0 \tag{7}$$

Da wir nur noch Lösungen für $s \neq 0$ suchen, können wir in (7) durch s dividieren und erhalten.

$$s^2 = 8 \tag{8}$$

Daraus und wegen (6) folgt:

$$s = \pm 2\sqrt{2}, \quad t = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \tag{9}$$

Die Abbildung 2 zeigt in rot die zugehörigen Transversalen. Blau ist die triviale Lösung.

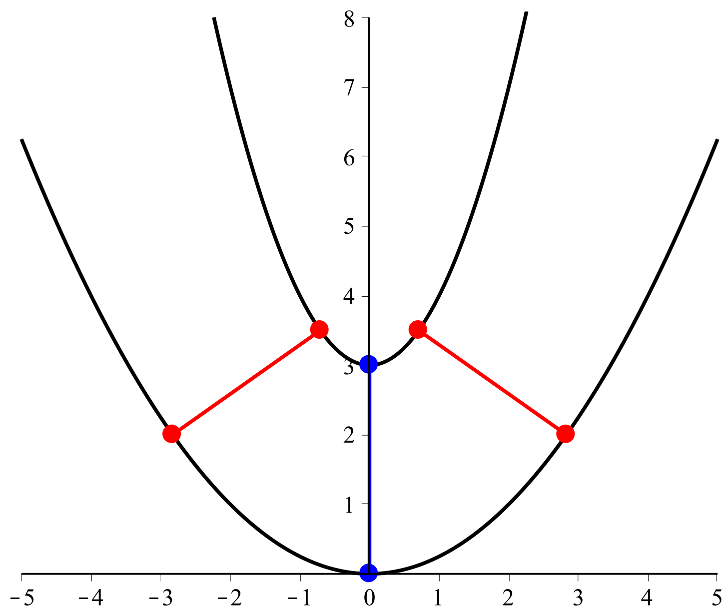

Abb. 2: Lösungen

Sämtliche Lösungen liegen auf Geraden durch (0, 4). Von diesem Punkt aus kann die Parabel q durch Streckung mit dem Faktor 4 auf die Parabel p abgebildet werden.