Hans Walser, [20090120a]

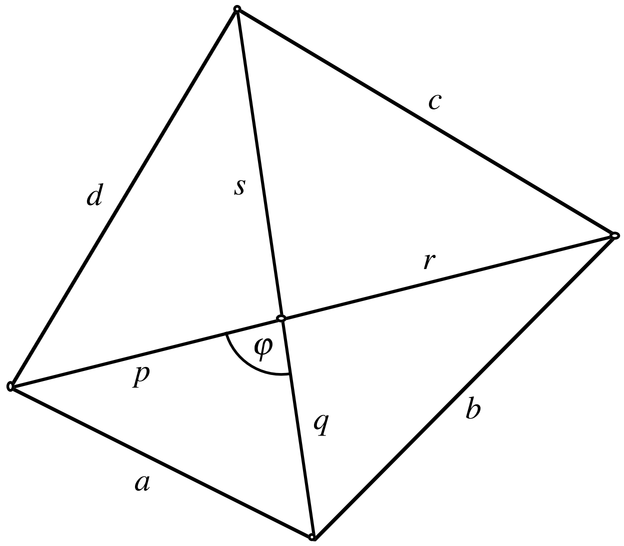
Orthogonale Diagonalen

1 Worum es geht

In einem Viereck mit den Seiten a, b, c, d sind die Diagonalen genau dann orthogonal, wenn für die Seiten gilt: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

2 Beweis mit Kosinussatz

Für den Beweis verwenden wir die Bezeichnungen der Figur.



Bezeichnungen

Aus dem Kosinussatz ergibt sich:

$$a^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos(\varphi)$$
$$b^2 = q^2 + r^2 - 2qr\cos(\pi - \varphi) = q^2 + r^2 + 2qr\cos(\varphi)$$
$$c^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos(\varphi)$$
$$d^2 = s^2 + p^2 - 2sp\cos(\pi - \varphi) = s^2 + p^2 + 2sp\cos(\varphi)$$

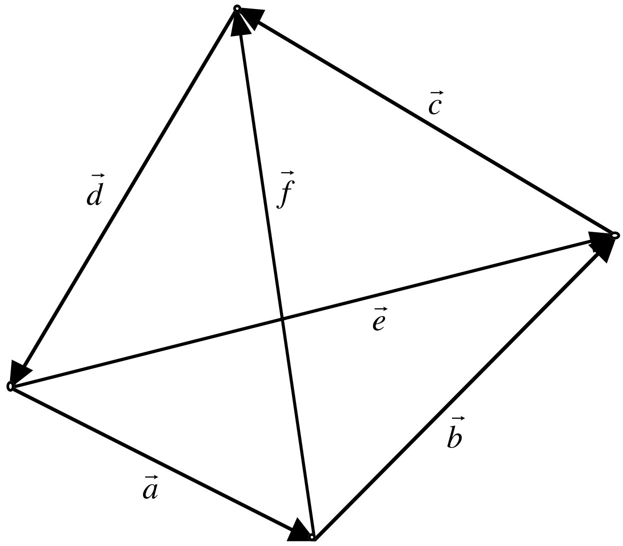
Für die alternierende Quadratsumme folgt daraus:

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = -2\cos(\varphi)(pq + qr + rs + sp)$$

Daraus folgt die Behauptung.

3 Vektorieller Beweis

Wir verwenden die Seitenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ gemäß Figur. Ferner seien $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{f} = \vec{b} + \vec{c}$ die beiden Diagonalvektoren.



Vektoren

Nun drücken wir die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{e}$ und $\vec{f}$ aus:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{a} \\
\vec{b} &= -\vec{a} + \vec{e} \\
\vec{c} &= -\vec{e} + \vec{a} + \vec{f} \\
\vec{d} &= -\vec{f} - \vec{a}
\end{aligned}$$

Für die Quadrate erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\vec{a}^2 &= \vec{a}^2 \\
\vec{b}^2 &= (-\vec{a} + \vec{e})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{e} + \vec{e}^2 \\
\vec{c}^2 &= \left(-\vec{e} + \vec{a} + \vec{f}\right)^2 = \vec{e}^2 + \vec{a}^2 + \vec{f}^2 - 2\vec{a}\vec{e} - 2\vec{e}\vec{f} + 2\vec{a}\vec{f} \\
\vec{d}^2 &= \left(-\vec{f} - \vec{a}\right)^2 = \vec{f}^2 + 2\vec{a}\vec{f} + \vec{a}^2
\end{aligned}$$

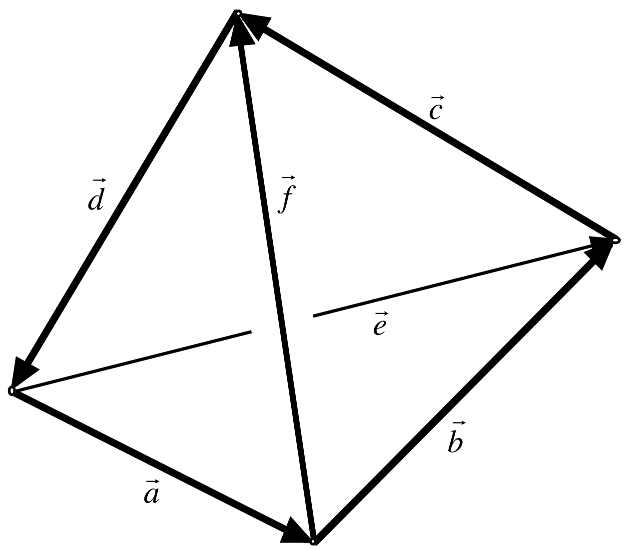
Somit ergibt sich für die alternierende Quadratsumme:

$$\begin{aligned}
&\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - \vec{d}^2 = \\
&= \vec{a}^2 - \left(\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{e} + \vec{e}^2\right) + \left(\vec{e}^2 + \vec{a}^2 + \vec{f}^2 - 2\vec{a}\vec{e} - 2\vec{e}\vec{f} + 2\vec{a}\vec{f}\right) - \left(\vec{f}^2 + 2\vec{a}\vec{f} + \vec{a}^2\right) = -2\vec{e}\vec{f}
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

4 Tetraeder

Der vektorielle Beweis ist nicht an die Ebene gebunden. Er gilt auch für vier Ecken im Raum, also für ein Tetraeder.

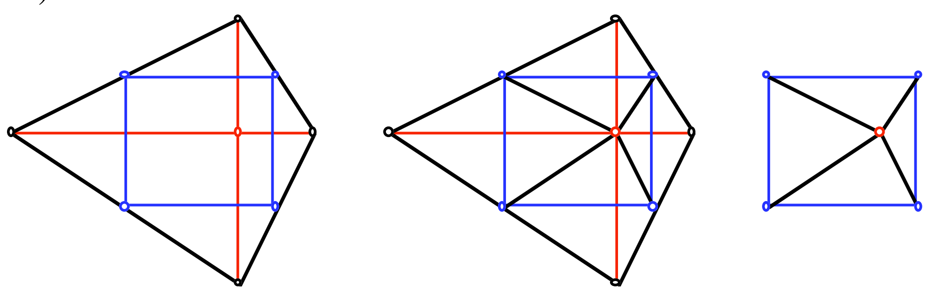


Tetraeder

Bei einem Tetraeder sind also zwei gegenüberliegende Kanten genau dann orthogonal, wenn die alternierende Quadratsumme der vier übrigen Kanten verschwindet.

5 Briefumschlag

Bei einem Viereck mit orthogonalen Diagonalen lassen sich die Ecken auf den Diagonalenschnittpunkt einfalten, so dass ein „Briefumschlag“ entsteht (unter Weglassung der Klebefalze).



Briefumschlag