Hans Walser, [20140901]

Origami im Raum

Anregung: G. G., B.

1 Worum geht es?

Statt mit einem quadratischen Origami-Papier arbeiten wir mit entsprechenden Analoga im Raum.

2 Klassisches Origami und einige Beispiele

Das klassische Origami verwendet ein quadratisches Papier, das dann gefaltet wird. Papier wird in der Regel als zweidimensional gesehen obwohl es wegen seiner Dicke streng genommen ein dreidimensionales Objekt ist. Das Falten benötigt auf den dreidimensionalen Umgebungsraum. Wenn wir aber nur an den Resultaten interessiert sind, können wir abstrakt von zweidimensionaler Geometrie sprechen. Im Folgenden einige einfache Beispiele.

2.1 Kantenmitten einfalten

Mit Hilfe der Diagonalen oder der Mittelparallelen bestimmen wir zunächst den Mittelpunkt. Dann falten wir die Kantenmitten in den Mittelpunkt des Quadrates (Abb. 1).

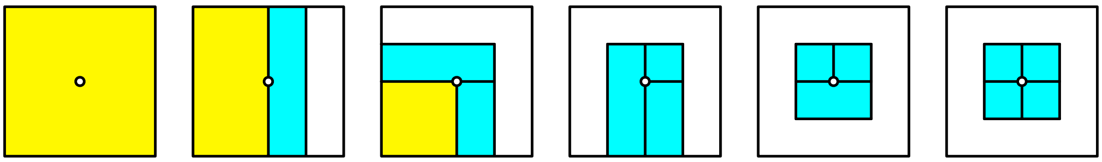

Abb. 1: Einfalten der Kantenmitten

Es entsteht ein vierfach überlagertes Quadrat. Der Flächeninhalt ist ein Viertel des Flächeninhaltes des Origami-Quadrates. Der Umriss des neuen Quadrates liegt auf den Mittelsenkrechten der Kantenmitten und des Mittelpunktes.

Man beachte die „Propellerfaltung“ im letzten Schritt. Sie ist rein ästhetisch begründet und soll eine vierteilige zyklische Symmetrie ermöglichen.

2.2 Ecken einfalten

Wir falten die Ecken in die Mitte (Abb. 2).

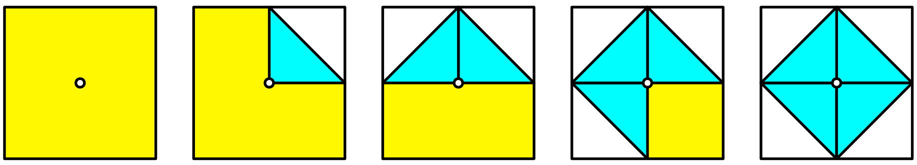

Abb. 2: Ecken einfalten

Es entsteht ein doppelt überlagertes Quadrat. Der Flächeninhalt des neuen Quadrates ist demzufolge die Hälfte des Flächeninhaltes des Origami-Quadrates. Der Umriss des neuen Quadrates liegt auf den Mittelsenkrechten der Endpunkte und des Mittelpunktes.

2.3 Wie es auch noch geht

Wir falten exemplarisch „Drittelpunkte" auf den Kanten in die Mitte (Abb. 3).

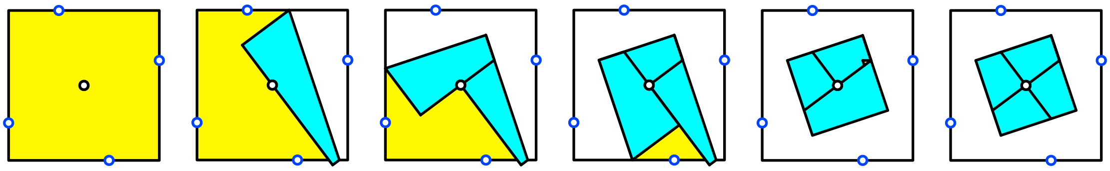

Abb. 3: Einfalten der Drittelpunkte in die Mitte

Es entsteht wieder ein Quadrat. Der Umriss des neuen Quadrates liegt auf den Mittelsenkrechten der Drittelpunkte und des Mittelpunktes. Die Überlagerung ist *nicht* mehr homogen. Der Flächeninhalt des neuen Quadrates ist $\frac{5}{18}$ des Flächeninhaltes des Origami-Quadrates.

Allgemein Erhalten wir in der Situation der Abbildung 4 einen Flächeninhalt von $\frac{1}{4}+t^2$ des Flächeninhaltes des Origami-Quadrates. Die Überlagerung ist im Allgemeinen nicht homogen.

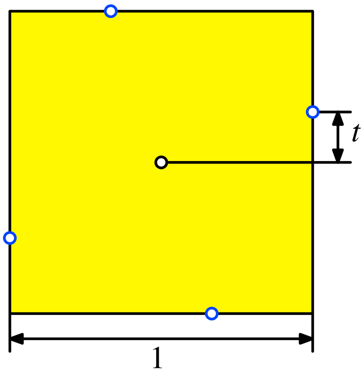

Abb. 4: Allgemeiner Fall

3 Kubisches Origami

Wir denken uns einen Würfel als Origami-Ausgangsmaterial. Zum Falten müssten wir in die vierte Dimension ausweichen. Wir können uns aber auch mit einem Schnitt mit der Mittelnormalebene zweier aufeinander zu faltender Punkte behelfen. Leider können wir nicht mehr wie bei den Abbildungen 1 bis 3 mit verschiedenen Farben für Vorderseite und Rückseite operieren, da die Begriffe *vorn* und *hinten* sich auf die vierte Dimension beziehen müssten.

3.1 Seitenmitten einfalten

Wir falten die Mittelunkte der sechs Seitenflächen des Würfels in den Würfelmittelpunkt. Dadurch einsteht ein achtfach überlagerter Würfel. Die Abbildung 5 zeigt die ersten Faltschritte und das Endresultat.

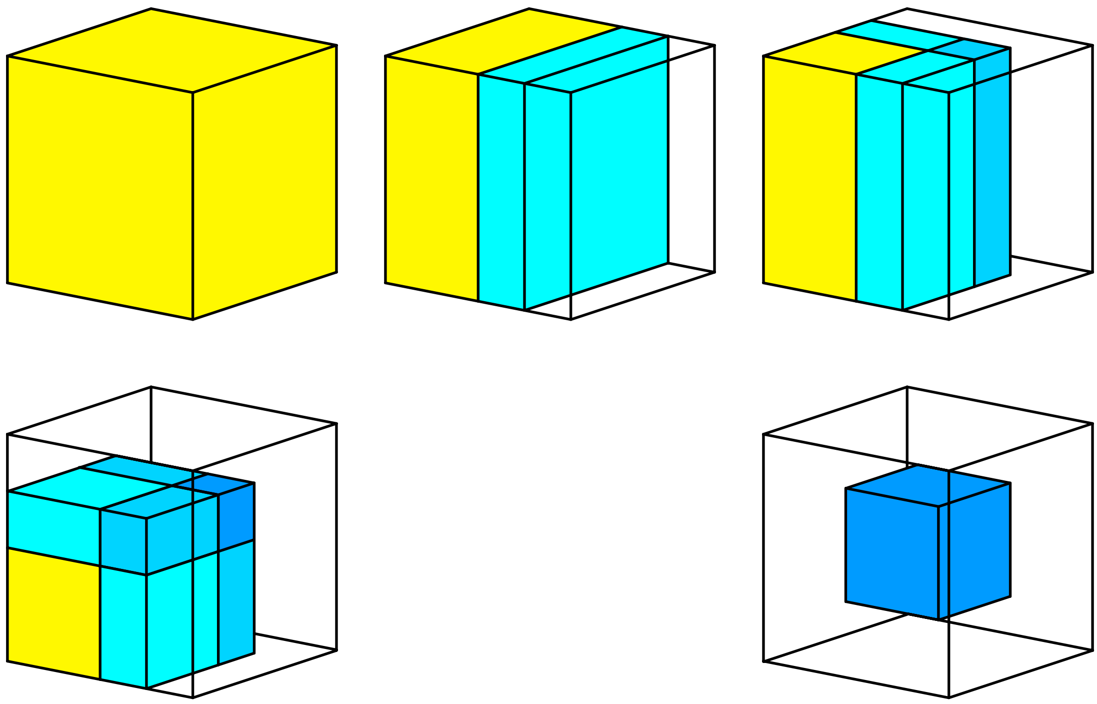

Abb. 5: Seitenmitten in Würfelmitte einfalten

3.2 Kantenmitten einfalten

Die Abbildung 6 zeigt die ersten Schritte und das Endresultat beim Einfalten der Kantenmitten.

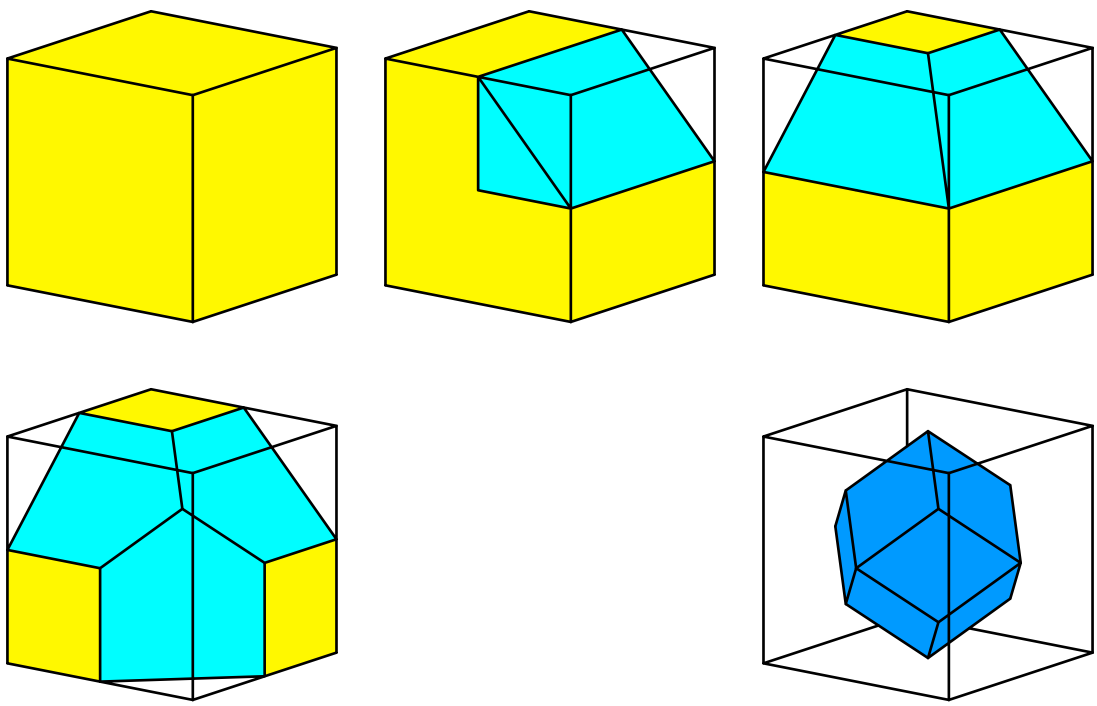

Abb. 6: Kantenmitten in Würfelmitte einfalten

Es entsteht ein Rhombendodekaeder. Sein Volumen ist ein Viertel des Volumens des Origami-Quaders.

Die Überlagerung ist nicht homogen.

3.3 Ecken einfalten

Das ist das spannendste Beispiel. Die Abbildung 7 zeigt das Einfalten der ersten Ecke in die Würfelmitte als transparentes Bild.

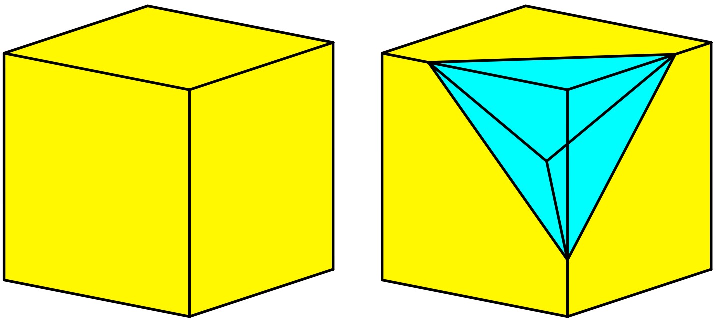

Abb. 7: Einfalten einer Ecke

Die Abbildung 8 zeigt das Endresultat. Es handelt sich um ein abgestumpftes Oktaeder.

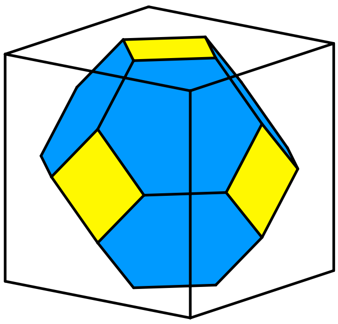

Abb. 8: Abgestumpftes Oktaeder

Das Volumen des abgestumpften Oktaeders ist die Hälfte des Volumens des Origami-Quaders.

3.4 Raumfüller

Die drei Ergebnisse unserer Faltprozesse beim Origami-Würfel also Würfel, Rhombendodekaeder und abgestumpftes Oktaeder sind so genannte Raumfüller. Der Raum kann damit lückenlos und überlappungsfrei ausgefüllt werden. Die Abbildungen 9, 10 und 11 zeigen je eine mit diesen Raumfüllern aufgeschichtete Pyramide.

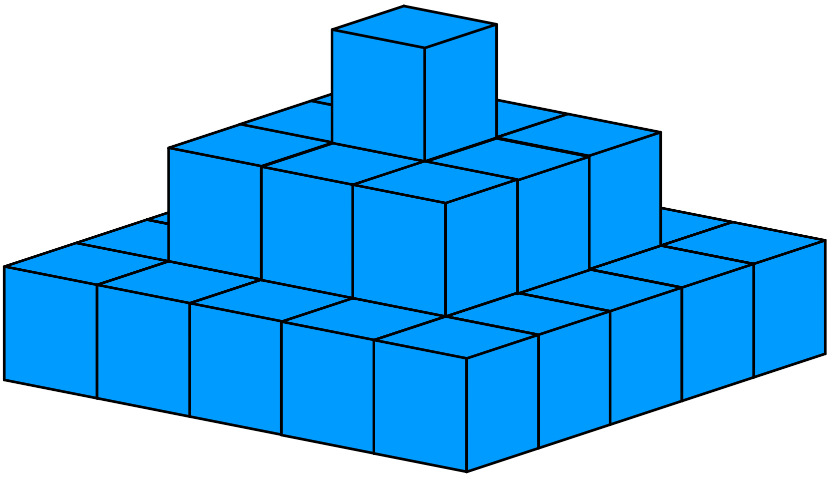

Abb. 9: Würfelpyramide

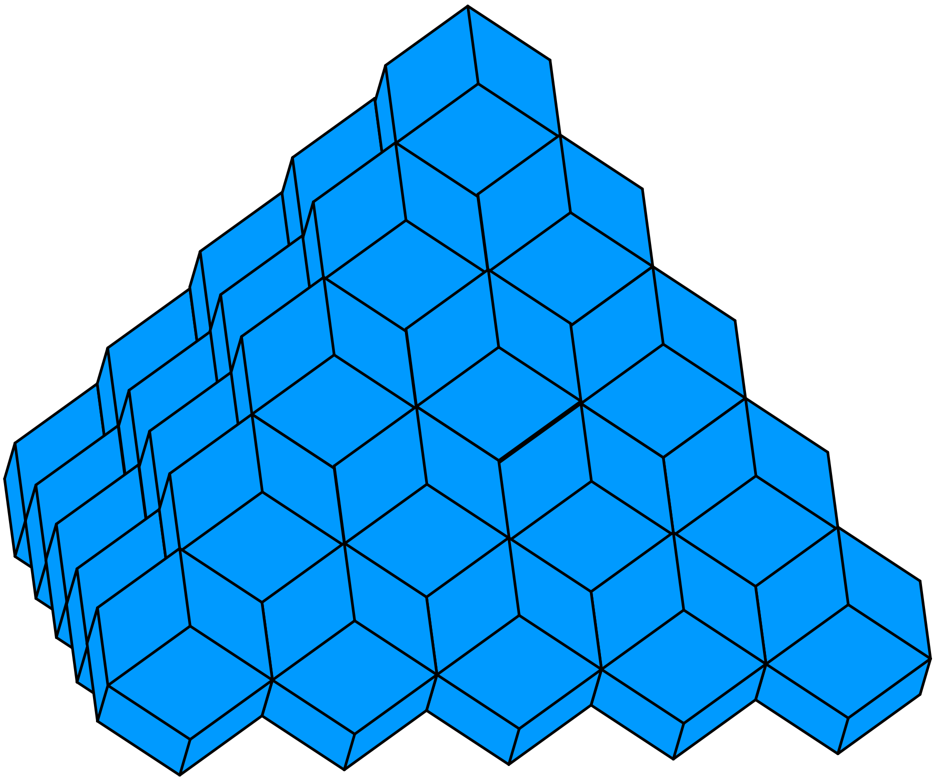

Abb. 10: Pyramide aus Rhombendodekaedern

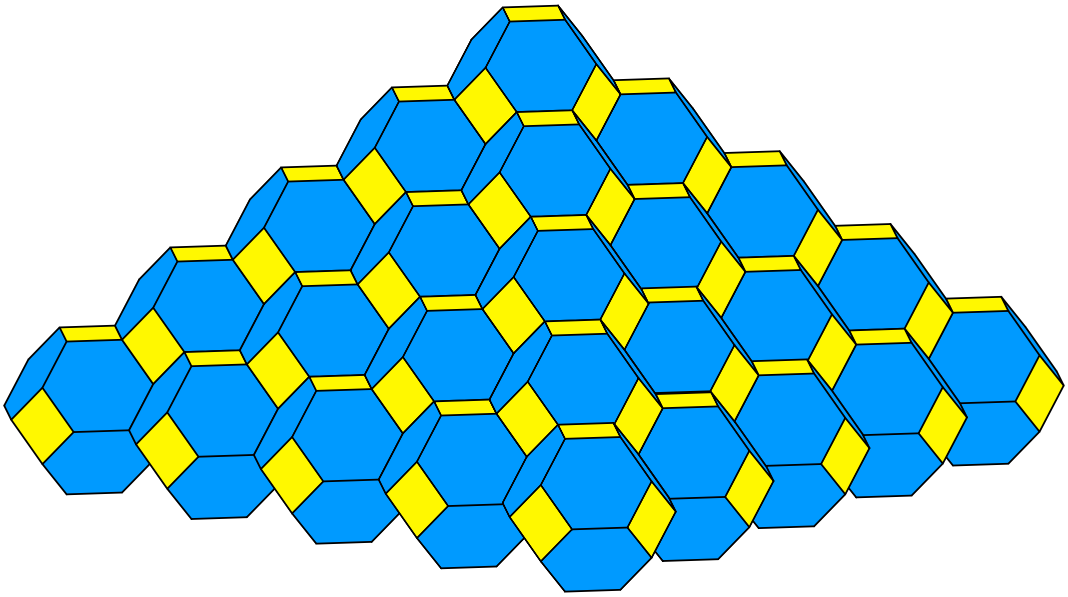

Abb. 11: Pyramide aus abgestumpften Oktaedern

4 Oktaeder-Origami

Oft wird nur der Würfel als räumliches Analogon des Quadrates gesehen. Das ist eine eingeschränkte Sicht. Wenn wir das Quadrat als konvexe Hülle von zwei gleich langen sich mittig orthogonal schneidenden Strecken sehen, ist das dreidimensionale Analogon das Oktaeder (Abb. 12).

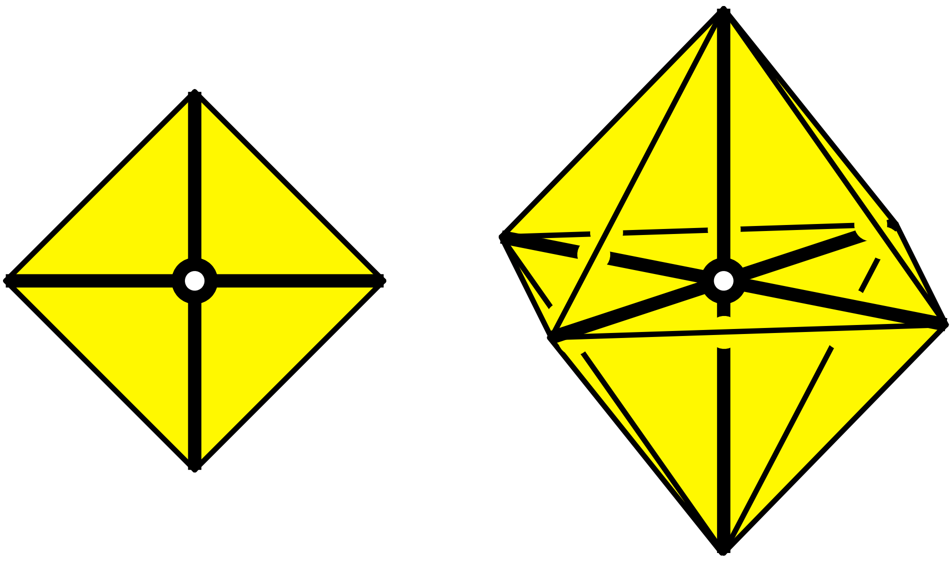

Abb. 12: Quadrat und Oktaeder

Wir arbeiten daher nun mit einem Oktaeder-Origami.

4.1 Seitenmitten einfalten

Es entsteht wieder ein Oktaeder.

4.2 Kantenmitten einfalten

Es entsteht das Rhombendodekaeder.

4.3 Ecken einfalten

Es entsteht ein Würfel.

4.4 Wie es auch noch geht

Analog zur Abbildung 3 dritteln wir die Oktaederkanten (Abb. 13). Dabei machen wir das so, dass die Kantenabschnitte von einer Oktaederecke aus gesehen abwechslungsweise ein Drittel und zwei Drittel ausmachen. Dies ist in der Abbildung 13 durch die Farbgebung angedeutet.

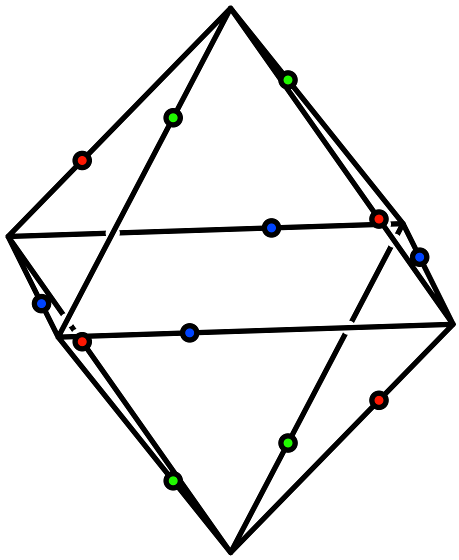

Abb. 13: Dritteln der Oktaederkanten

Wenn wir nun diese Teilpunkte in die Oktaedermitte einfalten, entsteht ein Pentagondodekaeder (Abb. 14). Die Farbgebung richtet sich nach der Farbe der eingefalteten Teilpunkte.

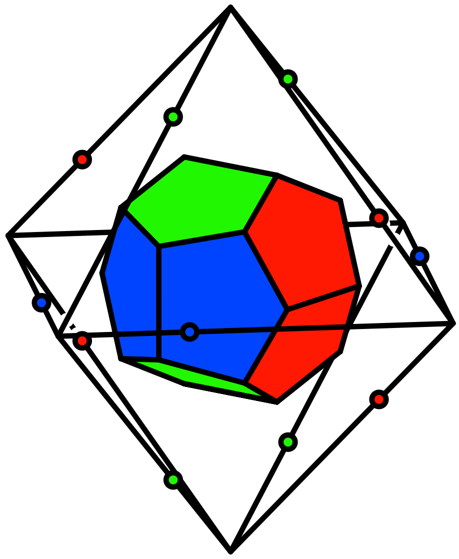

Abb. 14: Dodekaeder

Das Dodekaeder besteht aus zwölf kongruenten, aber nicht regelmäßigen Fünfecken. Die Fünfecke sind achsensymmetrisch. Vier der fünf Kanten sind gleich lang. Die fünfte Kante („Basis“) hat eine abweichende Länge. An einer Basis stoßen jeweils gleichfarbene Fünfecke zusammen.

Der Winkel α zwischen zwei an einer Basis zusammenstoßenden Fünfecken beträgt:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}\right) = \arctan(2) \approx 126.87°$$

Allgemein ergibt sich für Teilpunkte zum Verhältnis $a{:}b$ (a > b) der Winkel α:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

Wenn wir speziell mit Teilpunkten im Verhältnis des Goldenen Schnittes arbeiten ergibt sich das *regelmäßige Pentagondodekaeder*.