Hans Walser, [20130116]

Null hoch null

Anregung: S.M.S., B.

Frage

Was ergibt 0^0? — Immerhin ergibt x^0 immer 1 und 0^x immer 0... .

Bearbeitung

1 Experimente mit Taschenrechnern

Sharp PC-1211 liefert: $0^0 = 0$

Texas Instruments TI-31 SOLAR liefert *Error*.

Der Rechner in meinem Computer liefert: $0^0 = 1$

Der Google-Rechner liefert: $0^0 = 1$

Wir haben eine ganze Palette von Ergebnissen.

2 Hoch null

Die Frage nach x^0 wird wie folgt bearbeitet:

$$\frac{x^3}{x} = x^2$$
$$\frac{x^2}{x} = x^1 = x$$
$$\frac{x^1}{x} = x^0 = 1$$

Wir kommen also zu $x^0 = 1$ durch Dividieren. Es wird durch x dividiert. Nun ist aber eine Division nur sinnvoll, wenn der Divisor nicht null ist. Man kann nicht durch null dividieren. Das heißt aber, $x^0 = 1$ gilt nur für $x \neq 0$.

Mit andern Worten: 0^0 ist nicht sinnvoll. Es ist „verboten“ so wie auch die Division durch null „verboten“ ist.

3 Annäherung an null

Wir berechnen x^x für x-Werte, die gegen Null streben.

x	x^x
0.1	0.7943282347
0.01	0.9549925860
0.001	0.9931160484
0.0001	0.9990793900
0.00001	0.9998848774
0.000001	0.9999861846
0.0000001	0.9999983882
0.00000001	0.9999998158

Wir vermuten: $\lim\limits_{x \to 0} x^x = 1$

Beweis: Zunächst ist:

$$x^x = \mathrm{e}^{x \ln(x)}$$

Daraus ergib sich:

$$\lim_{x \to 0} x^x = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to 0}(x \ln(x))}$$

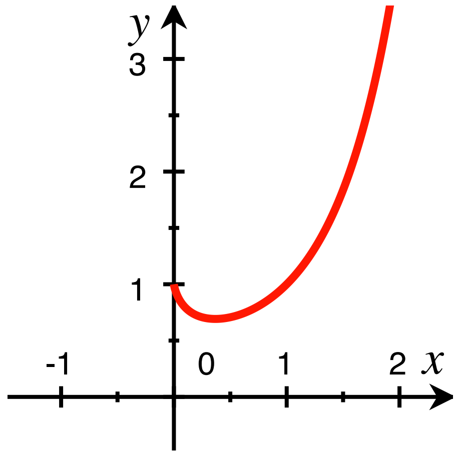
Wir bearbeiten den Exponenten. Mit der Regel von Bernoulli-de l'Hôpital erhalten wir:

$$\lim_{x \to 0}(x \ln(x)) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0} x = 0$$

Somit ist:

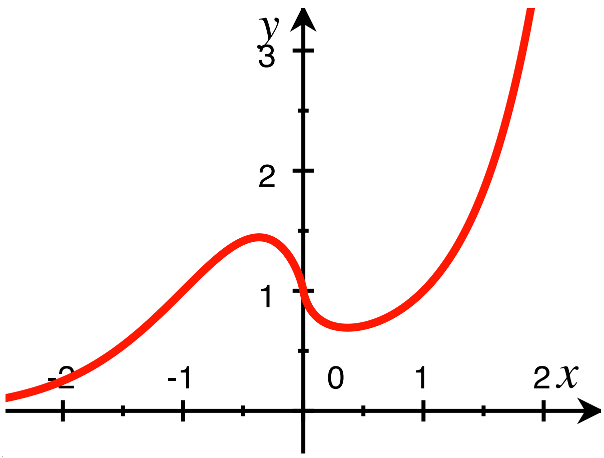
$$\lim_{x \to 0} x^x = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to 0}(x \ln(x))} = \mathrm{e}^0 = 1$$

Die Funktion $f(x) = x^x$ ist für $x = 0$ nicht definiert, es ist aber $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Die Abbildung zeigt den Grafen der Funktion.



Funktionsgraf

Die folgende Abbildung zeigt den Funktionsgrafen von $g(x)=|x|^x$. Diese Funktion ist auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definiert.



Erweiterung der Funktion