Hans Walser, [20160427]

Nullsummen

1 Aufgabenstellungen

1.1 Roter Kranz

Einem Viereck mit gleich langen und orthogonalen Diagonalen setzen wir Quadrate an (rot in Abbildung 1).

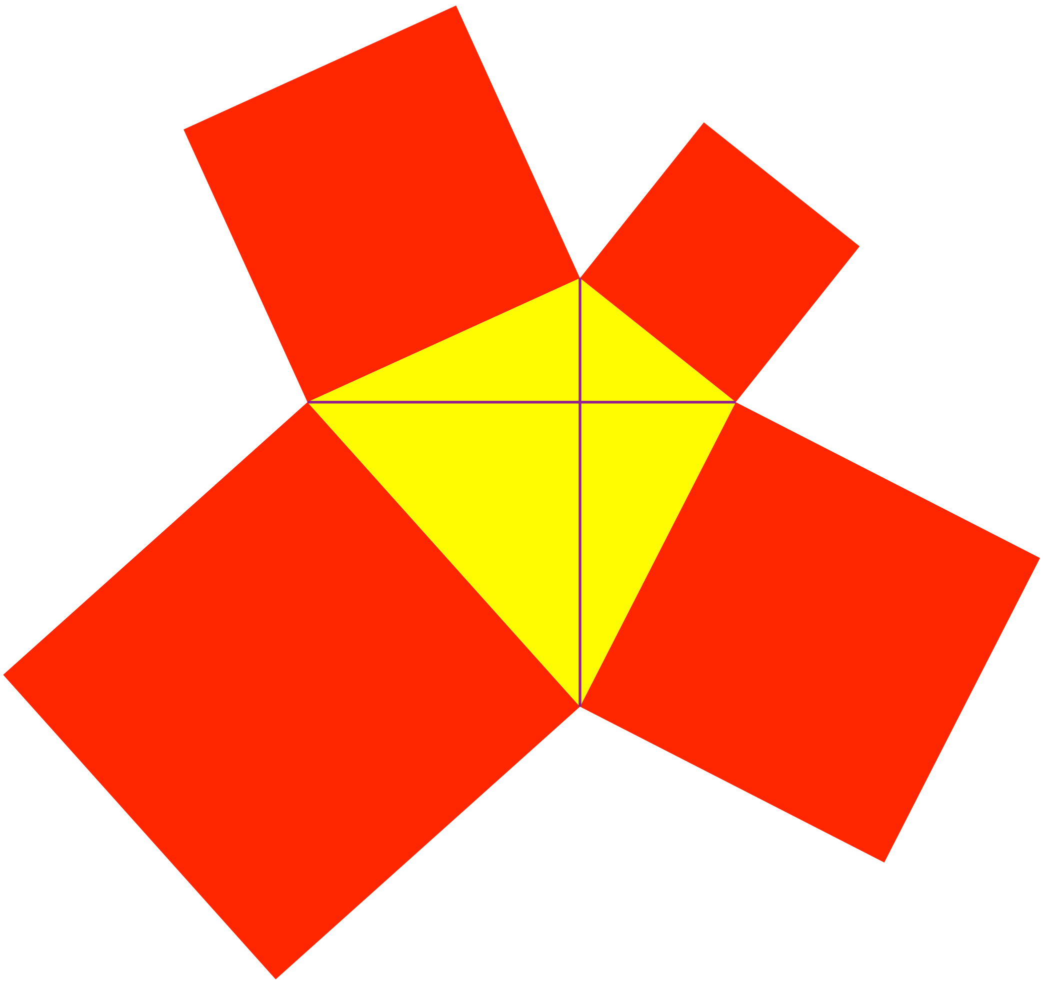

Abb. 1: Quadrate ansetzen

Wie groß ist die alternierende Flächensumme der vier roten Quadrate?

1.2 Grüner Kranz

Nun fügen wir einen weiteren Kranz von Quadraten dazu (grün in Abbildung 2).

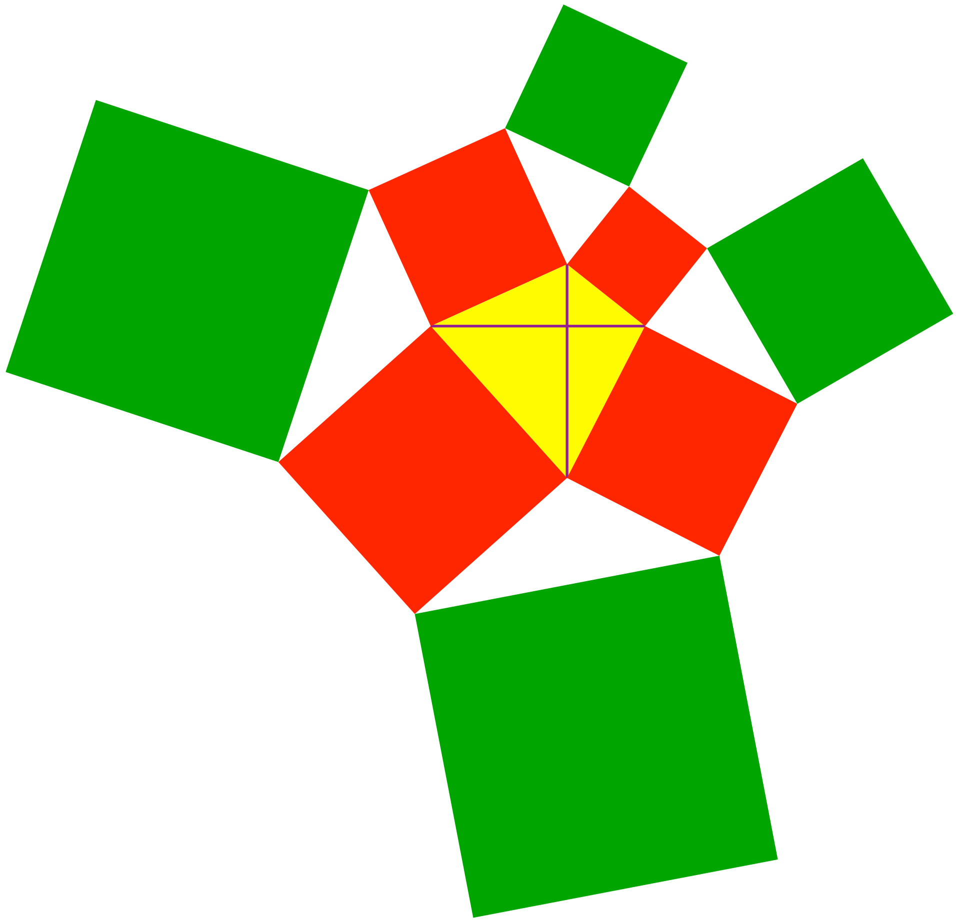

Abb. 2: Grüner Quadratkranz

Wie groß ist die alternierende Flächensumme der vier grünen Quadrate?

1.3 Blauer Kranz

Nun fügen wir einen weiteren Kranz von Quadraten dazu (blau in Abbildung 3).

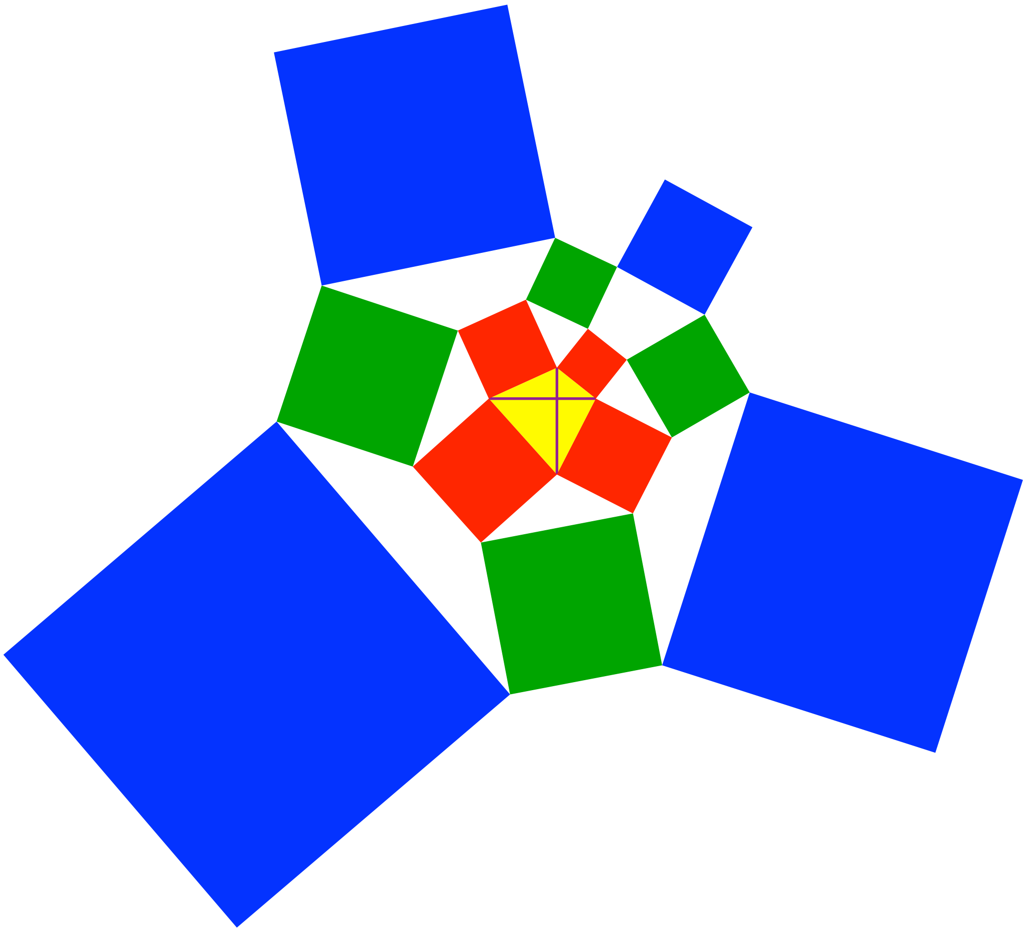

Abb. 3: Noch ein Kranz

Wie groß ist die alternierende Flächensumme der vier blauen Quadrate?

1.4 Wie geht es weiter?

Wie geht es weiter?

2 Bearbeitungen

2.1 Roter Kranz

Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung 4.

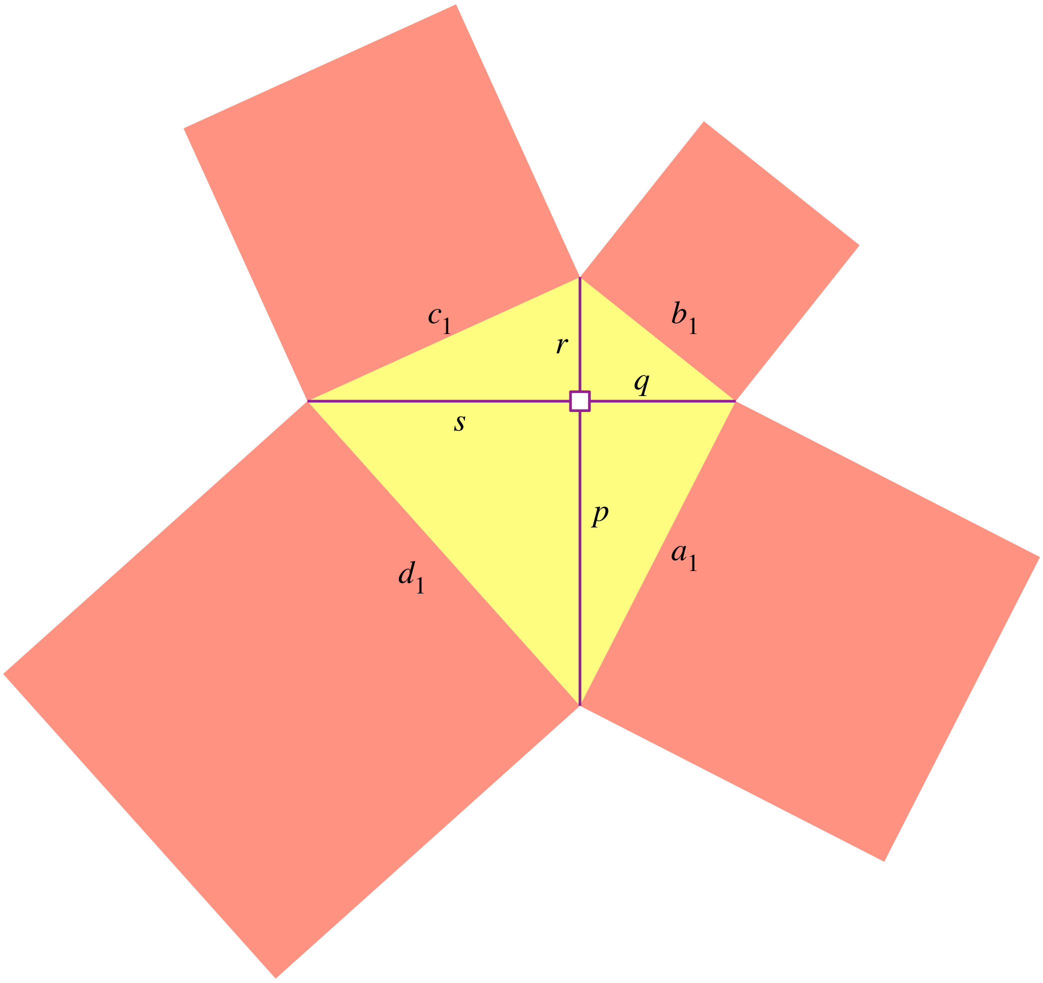

Abb. 4: Bezeichnungen

Die Diagonalen unterteilen das Ausgangsviereck in vier rechtwinklige Dreiecke. Nach Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= p^2 + q^2 \\ b_1^2 &= q^2 + r^2 \\ c_1^2 &= r^2 + s^2 \\ d_1^2 &= s^2 + p^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Die alternierende Flächensumme verschwindet:

$$a_1^2 - b_1^2 + c_1^2 - d_1^2 = 0 \tag{2}$$

Für den roten Kranz ist es unwesentlich, dass die beiden Diagonalen gleich lang sind. (2) gilt in jedem Viereck mit orthogonalen Diagonalen.

2.2 Grüner Kranz

Die Abbildung 5 gibt die Bezeichnungen.

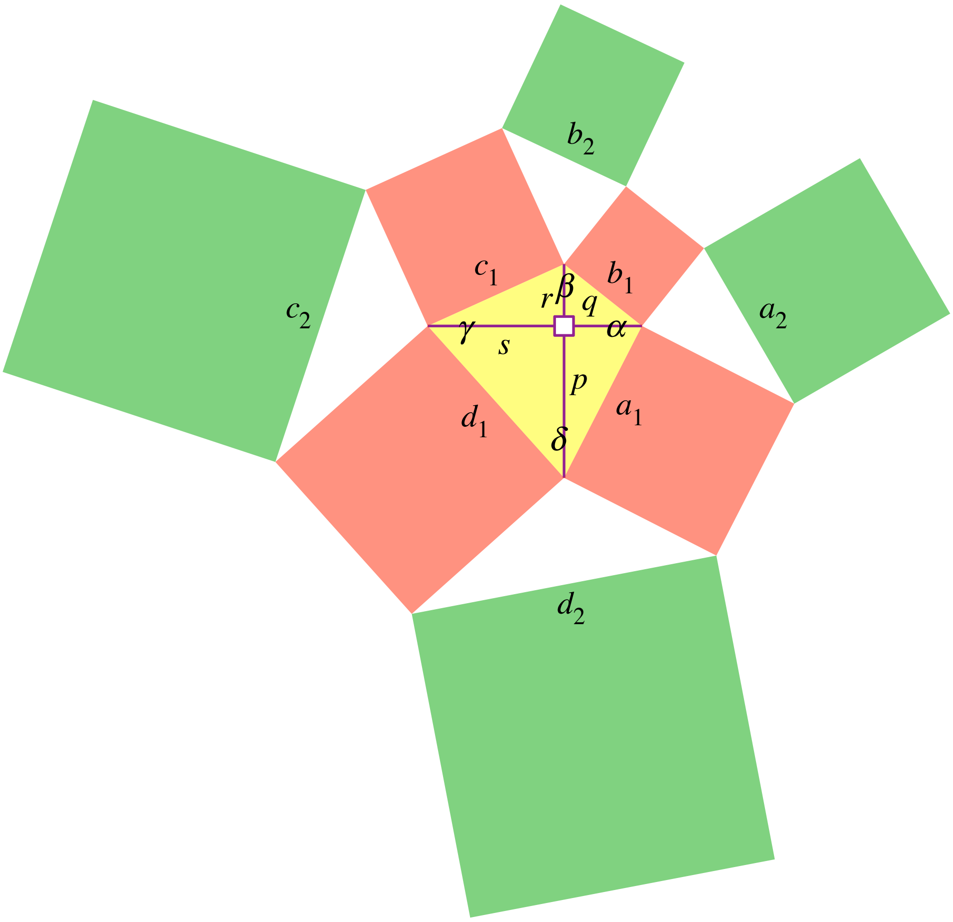

Abb. 5: Bezeichnungen

Nun wird es wichtig, dass die Diagonalen nicht nur orthogonal, sondern auch gleich lang sind. Wir setzen:

$$p + r = q + s = a_0 \tag{3}$$

Nach dem Kosinus-Satz ist

$$a_0^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \cos(\alpha) \tag{4}$$

Der Außenwinkel von α ist $\pi - \alpha$. Daher ist ebenfalls nach dem Kosinus-Satz:

$$a_2^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \cos(\pi - \alpha) = a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1 \cos(\alpha) \tag{5}$$

Addition von (4) und (5) liefert:

$$a_0^2 + a_2^2 = 2a_1^2 + 2b_1^2 \tag{6}$$

Analog:

$$\begin{aligned} a_0^2 + a_2^2 &= 2a_1^2 + 2b_1^2 \\ a_0^2 + b_2^2 &= 2b_1^2 + 2c_1^2 \\ a_0^2 + c_2^2 &= 2c_1^2 + 2d_1^2 \\ a_0^2 + d_2^2 &= 2d_1^2 + 2a_1^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Wegen (2) ergibt die alternierende Addition in (7):

$$a_2^2 - b_2^2 + c_2^2 - d_2^2 = 0 \tag{8}$$

2.3 Blauer Kranz

Experiment mit DGS ergibt:

$$a_3^2 - b_3^2 + c_3^2 - d_3^2 = 0 \tag{9}$$

Ich habe dafür noch keinen Beweis gefunden. Der Kosinus-Satz ist nicht mehr anwendbar, da die Zwischenräume nun unregelmäßige Vierecke sind.

Ebenso vermute ich:

$$a_n^2 - b_n^2 + c_n^2 - d_n^2 = 0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{10}$$