Hans Walser, [20131014]

Normalaxonometrie im Raster

1 Worum geht es

Es wird eine normalaxonometrische Würfeldarstellung im Quadratraster gesucht. Die Grundidee arbeitet mit dem pythagoreischen Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4, 5, also dem klassischen Lehrerdreieck.

2 Ergebnis

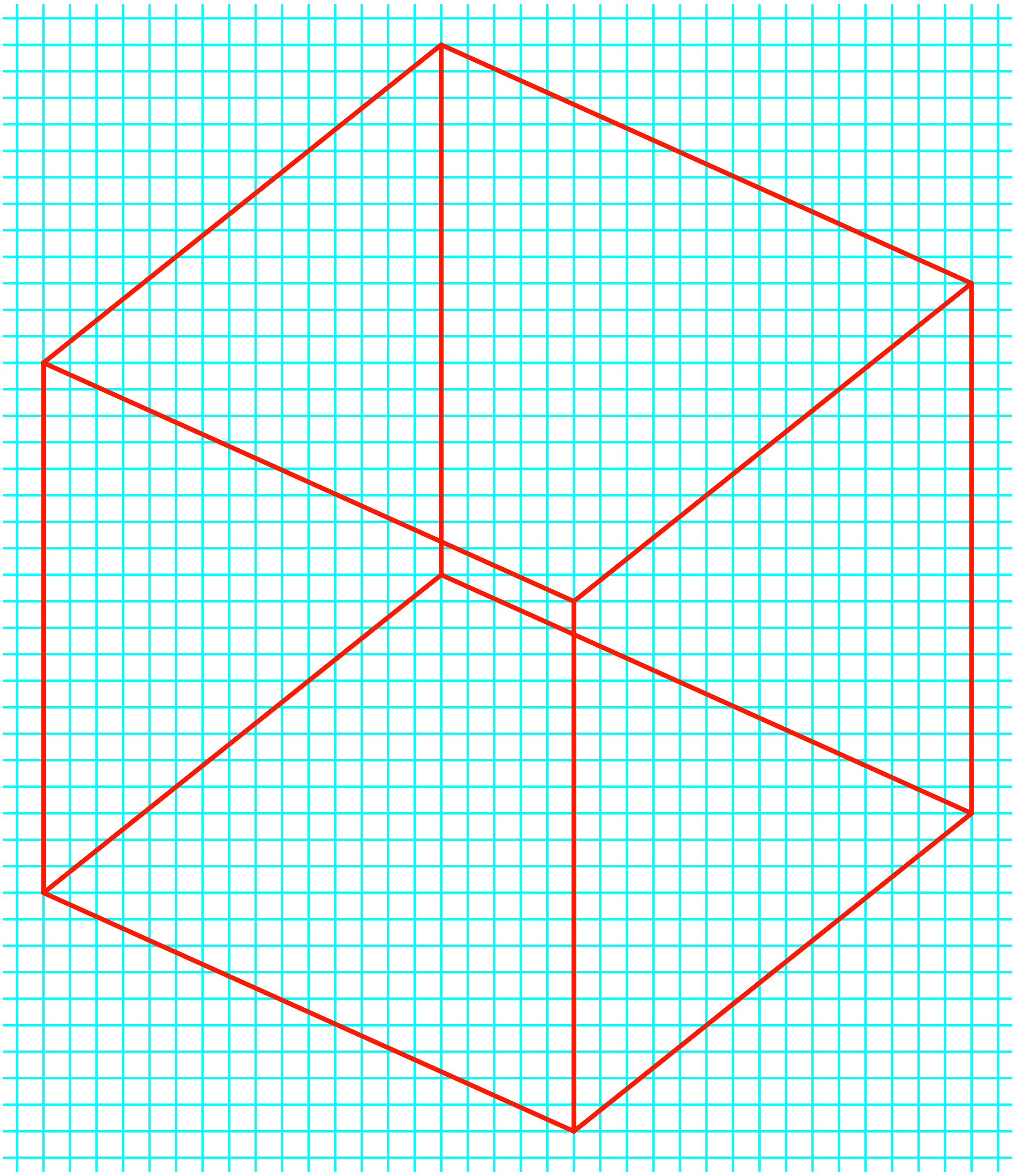

Abb. 1: Der Würfel

Die Darstellung ist exakt, benötigt aber viel Platz. Auf einem 4mm-Raster ist es auf einem DIN A4 Papier aber gerade noch zu machen.

Die Abbildung 2 zeigt die Situation im Kontext der Einheitskugel.

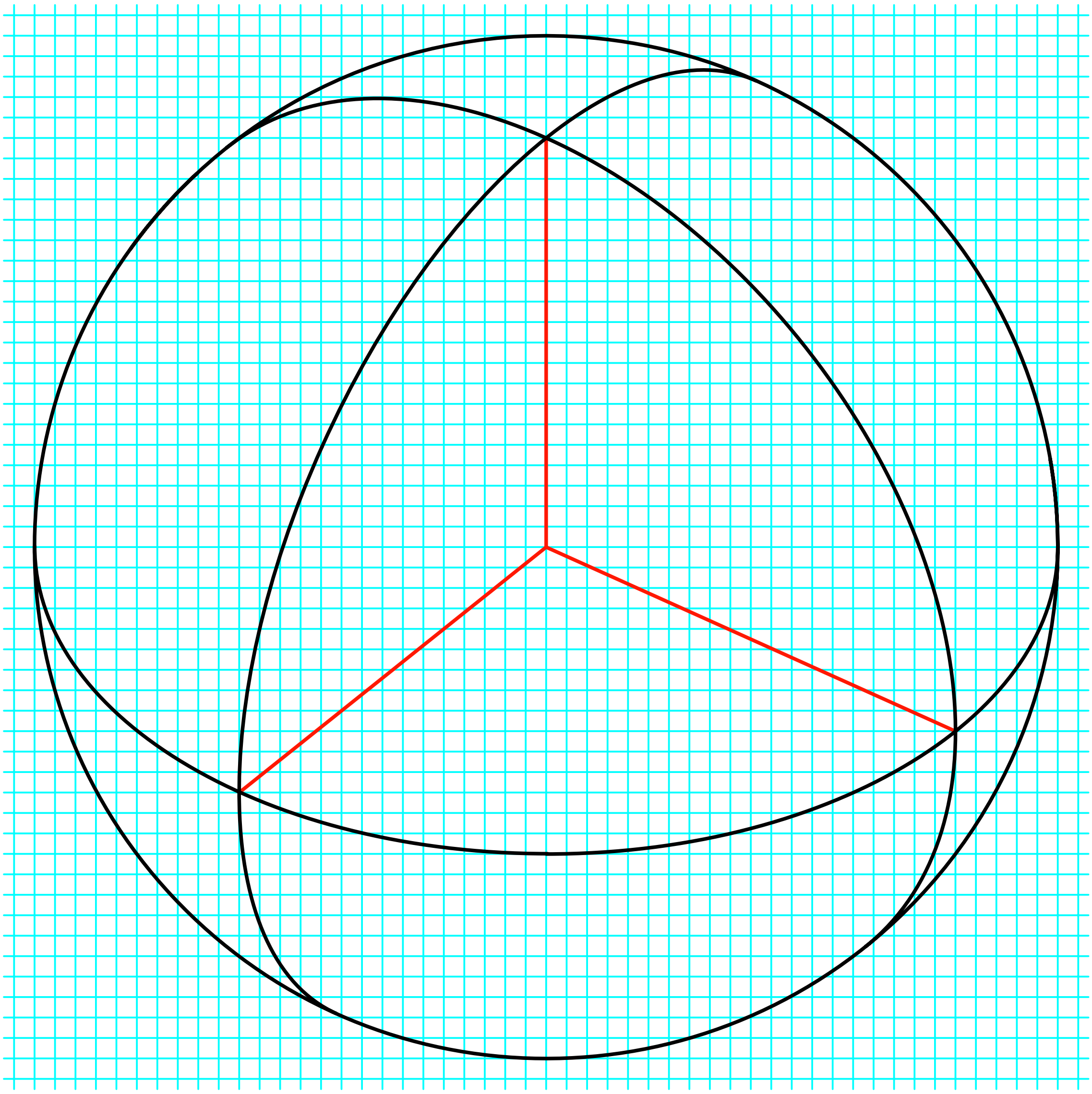

Abb. 2: Einheitskugel

3 Herleitung

Wir arbeiten wie in der Schule mit den Eulerschen Winkeln ϑ und φ. Die Abbildung 3 zeigt die Situation im Kontext der Einheitskugel in Auf- und Kreuzriss, das heißt von vorne und von der Seite. Die Beschriftungen sind problemangepasst und weichen von den in der darstellenden Geometrie üblichen geringfügig ab.

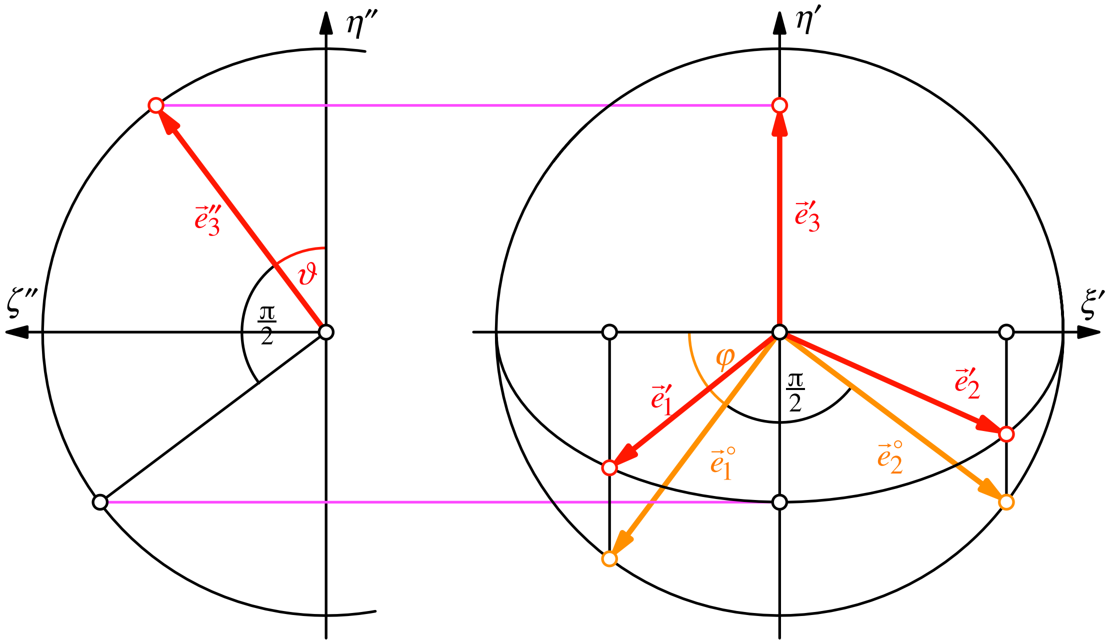

Abb. 3: Auf- und Kreuzriss

Wir wählen nun ϑ als den kleineren der beiden spitzen Winkel im Lehrerdreieck mit den Seiten 3, 4, 5 und φ als den größeren (Abb. 4).

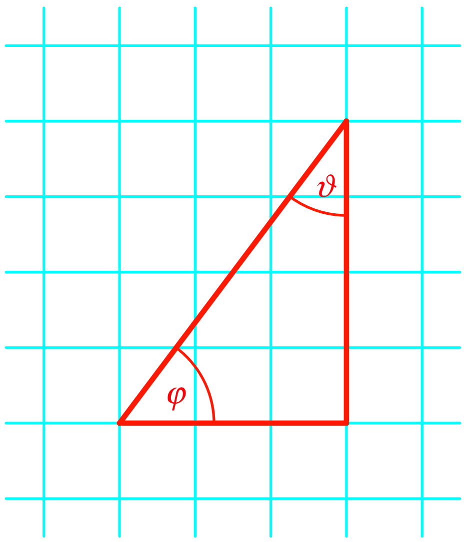

Abb. 4: Winkel im Lehrerdreieck

Es ist dann

$$\cos(\vartheta)=\tfrac{4}{5},\quad \sin(\vartheta)=\tfrac{3}{5},\quad \cos(\varphi)=\tfrac{3}{5},\quad \sin(\varphi)=\tfrac{4}{5}$$

Für die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ erhalten wir im in der Abbildung 3 angegebenen kartesischen ξ, η, ζ -Koordinatensystem:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} -\cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\cos(\vartheta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{25} \\ -\frac{12}{25} \\ \frac{16}{25} \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ -\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\sin(\vartheta) \\ \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\cos(\vartheta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{25} \\ -\frac{9}{25} \\ \frac{12}{25} \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{20}{25} \\ \frac{15}{25} \end{bmatrix}$$

Es lässt sich alles auf den gemeinsamen Nenner 25 bringen. Entsprechend können wir mit einem Fünfundzwanzigstel-Raster arbeiten.

Für den zeichnerisch relevanten Aufriss erhalten wir:

$$\vec{e}_1' = \begin{bmatrix} -\frac{15}{25} \\ -\frac{12}{25} \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2' = \begin{bmatrix} \frac{20}{25} \\ -\frac{9}{25} \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{20}{25} \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich die Rasterlösung der Abbildung 5.

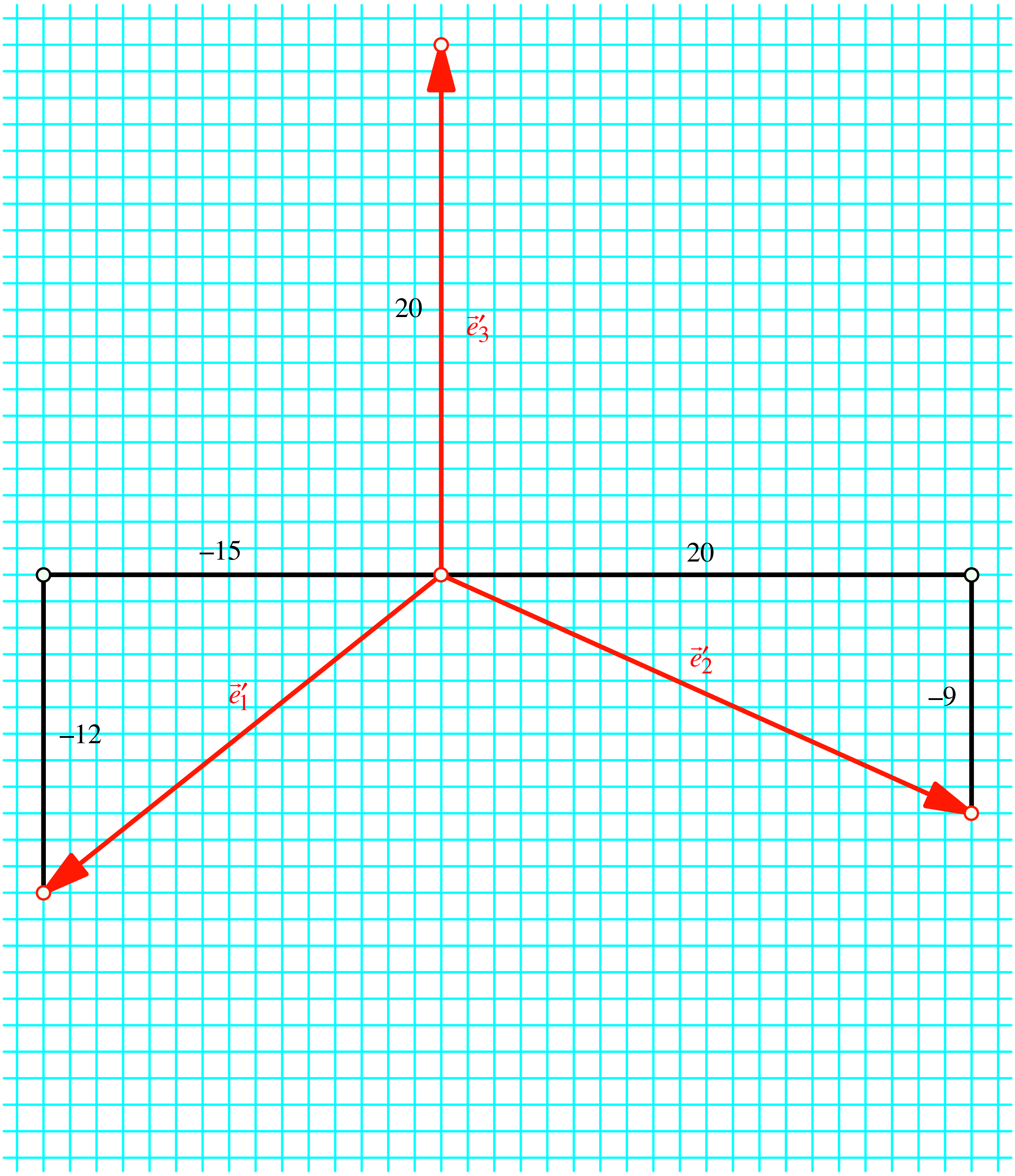

Abb. 5: Rasterkoordinaten

Die durch die Projektion weggelassenen dritten Komponenten $\frac{16}{25}, \frac{12}{25}, \frac{15}{25}$ der Einheitsvektoren liefern die kurzen Halbachsen der in der Abbildung 2 eingezeichneten Ellipsen (Meridiane für 90°E und 0° sowie Äquator).

Wenn wir in den Einheitsvektoren die mittleren Komponenten ausblenden, liefern die restlichen eine zweite Rasterlösung (Abb. 6).

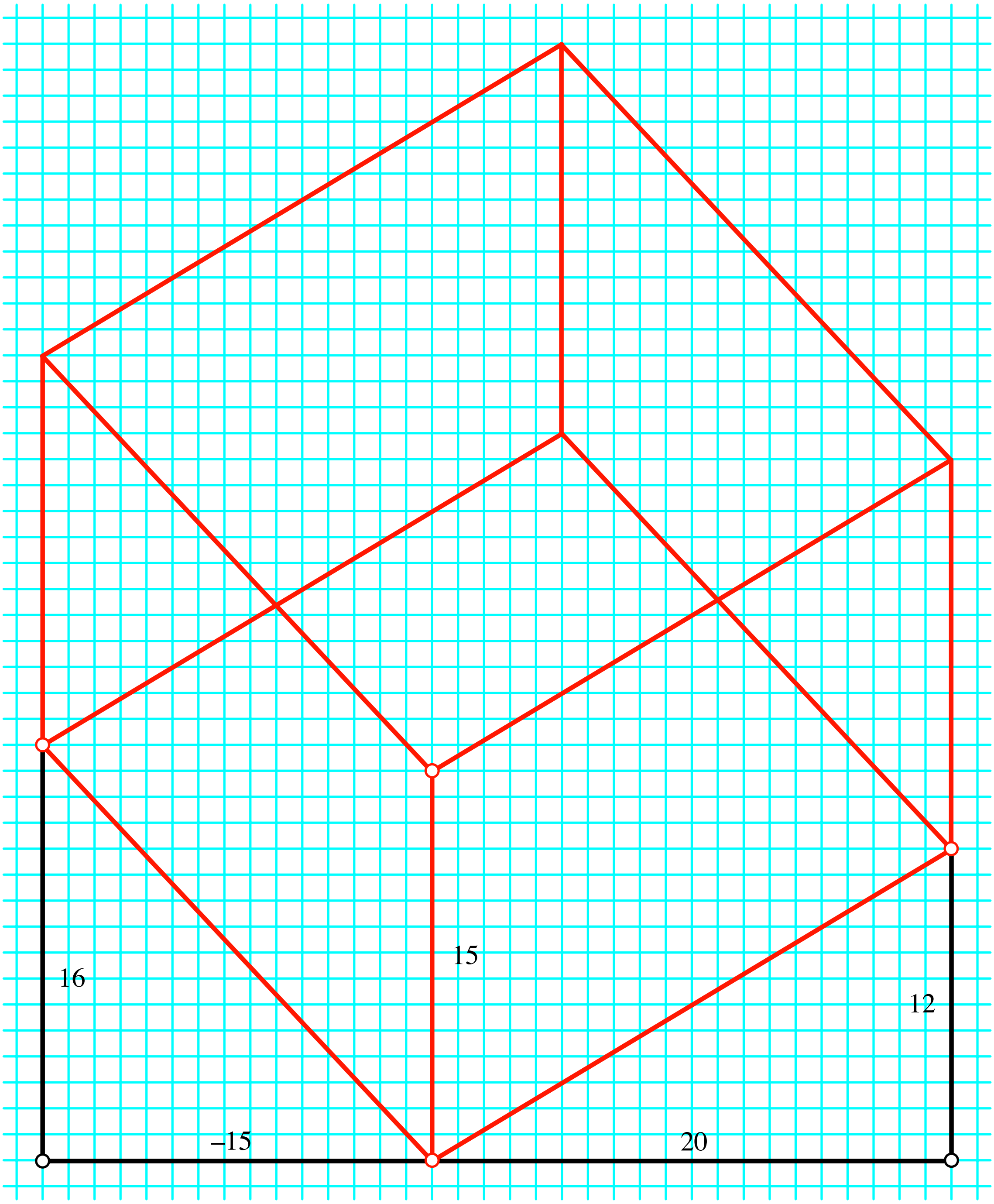

Abb. 6: Zweite Lösung

Durch Ausblenden der ersten Komponenten in den Einheitsvektoren erhalten wir eine dritte, etwas spezielle Rasterlösung (Abb. 7). Wir erkennen mehrfach das Lehrerdreieck.

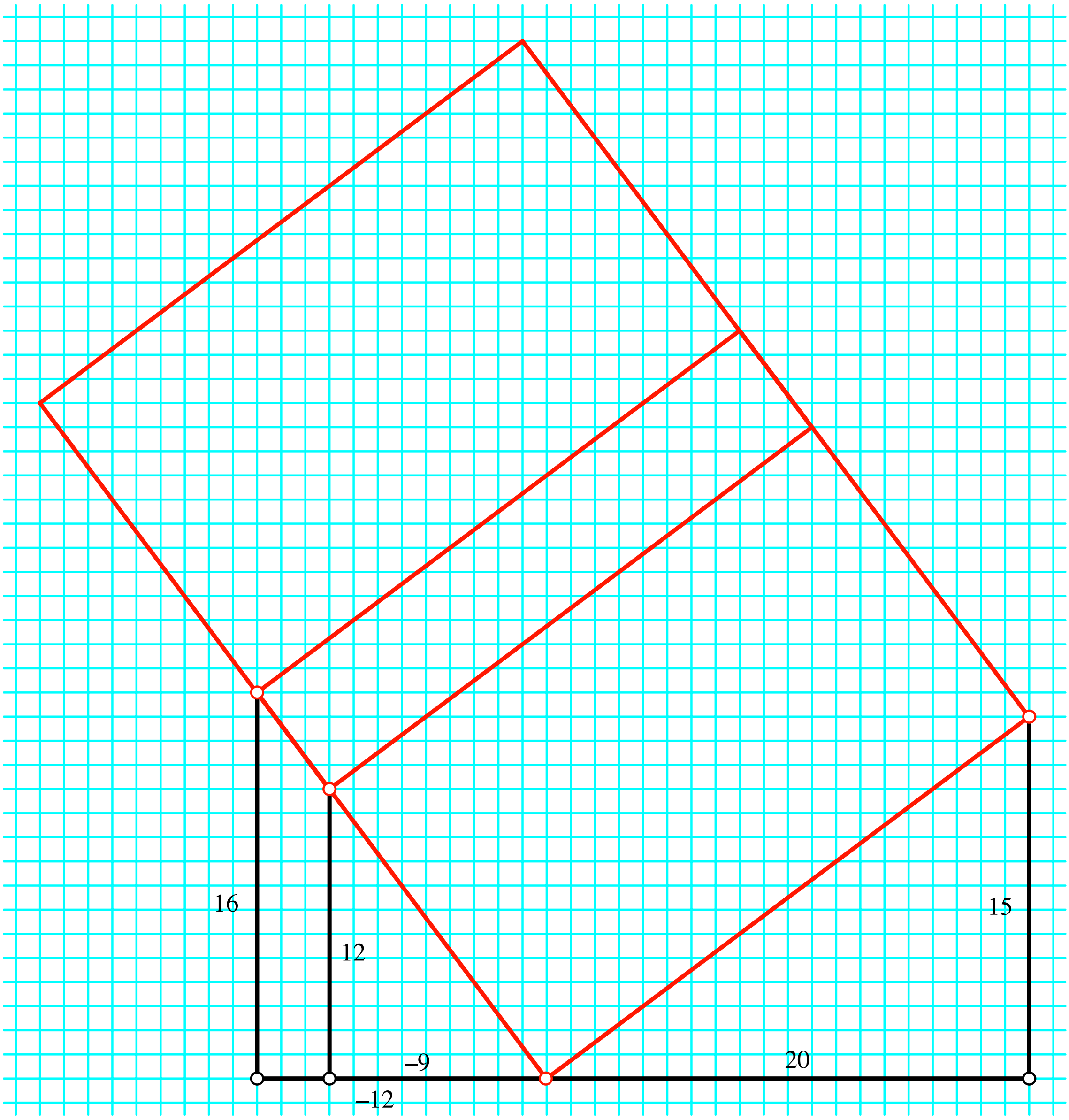

Abb. 7: Dritte Lösung

Das hätte man auch einfacher haben können (Abb. 8).

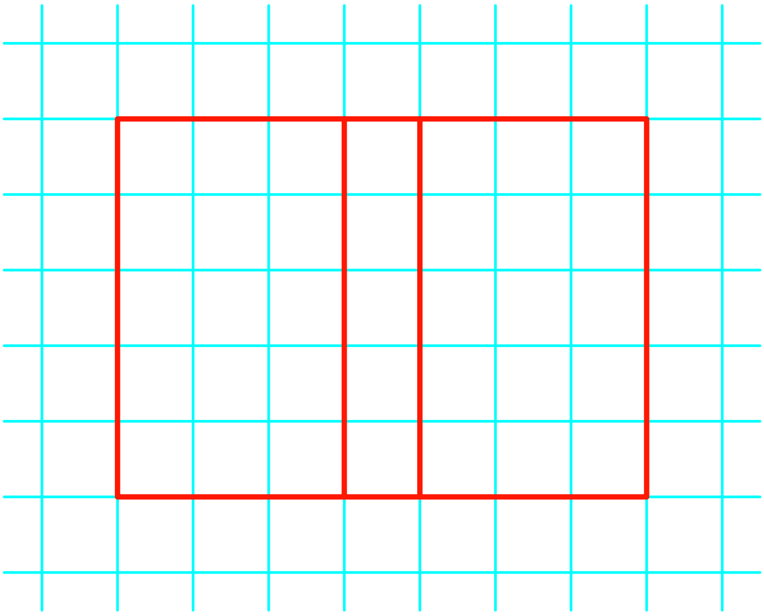

Abb. 8: Einfachere Lösung

4 Hintergrund

Die Spaltenvektoren der Matrix

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\beta) \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\beta) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \end{bmatrix}$$

haben die Länge 1 und sind paarweise orthogonal. Wenn nun α und β Winkel von pythagoreischen Dreiecken (allenfalls auch zwei verschiedenen pythagoreischen Dreiecken) sind, werden alle Matrixeinträge rational. Durch Erweitern auf gemeinsamen Nenner und geeignete Projektion (Weglassen einer Zeile der Matrix) ergibt sich eine Rasterlösung.