

## Ewige Paarläufe

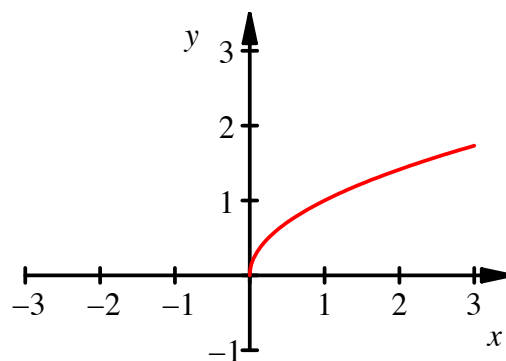
### 1 Worum es geht

Es werden Beispiele vorgestellt, bei denen durch die Anwendung des Verfahrens von Newton-Raphson ein ewiger Paarlaf zwischen zwei Werten entstehen.

### 2 Wurzelfunktionen

#### 2.1 Das einfache Beispiel

Die Funktion  $y = f(x) = \sqrt{x}$  ist nur für  $x \geq 0$  definiert. Sie hat die Nullstelle 0.



Funktionsgraf

Was geschieht, wenn wir versuchen, mit dem Verfahren von Newton-Raphson und dem Startwert  $x_0 = 2$  eine Nullstelle zu bestimmen?

Mit dem MuPAD-Programm

```
f:=x->sqrt(x):
x[0]:=2:
N:=5:
for n from 0 to N do
  x[n+1]:=(x[n]-f(x[n])/f'(x[n])):
end_for:
for n from 0 to N do
  print(Unquoted," x[\".n.\"]\t= \".x[n]);
end_for:
```

erhalten wir:

```
x[0] = 2
x[1] = -2
x[2] = 2
x[3] = -2
x[4] = 2
x[5] = -2
```

Die Werte pendeln zwischen 2 und  $-2$ . Das ist völliger Unsinn, denn der Wert  $x_1 = -2$  ist *nicht* im Definitionsbereich der Funktion und kann daher nicht weiter verarbeitet werden.

Für einen beliebigen Startwert  $x_0 = a \neq 0$  pendeln die Werte zwischen  $a$  und  $-a$ .

Beweis:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Damit erhalten wir für die Rekursion nach Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sqrt{x_n}}{\frac{1}{2\sqrt{x_n}}} = x_n - 2x_n = -x_n$$

Wir sehen, dass die für  $|x| < 0$  rein imaginäre Zahl  $\sqrt{x}$  durch das Quadrieren wieder reell wird.

## 2.2 Das subtile Beispiel

Die Funktion  $y = f(x) = \sqrt{-|x|}$  ist nur für  $x = 0$  definiert, das ist dann auch die Nullstelle.

Was geschieht, wenn wir wieder versuchen, mit dem Verfahren von Newton-Raphson und dem Startwert  $x_0 = 2$  eine Nullstelle zu bestimmen?

Wir erhalten erneut:

$$\begin{aligned} x[0] &= 2 \\ x[1] &= -2 \\ x[2] &= 2 \\ x[3] &= -2 \\ x[4] &= 2 \\ x[5] &= -2 \end{aligned}$$

Beide Werte sind aber nicht im Definitionsbereich der Funktion.

Für einen beliebigen Startwert  $x_0 = a \neq 0$  pendeln die Werte zwischen  $a$  und  $-a$ .

Beweis: Für  $x \neq 0$  gilt:

$$f(x) = \sqrt{-|x|}$$

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sgn}(x)}{2\sqrt{-|x|}}$$

Damit erhalten wir für die Rekursion nach Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt{-|x_n|}}{\frac{-\operatorname{sgn}(x_n)}{2\sqrt{-|x_n|}}} = x_n + \underbrace{2 \operatorname{sgn}(x_n)(-|x_n|)}_{=-x_n} = -x_n$$

### 3 Variation der Vorzeichen

Wir untersuchen die vier Funktionen:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

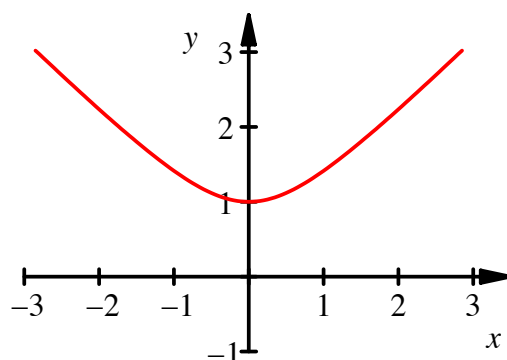
$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{-1+x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{-1-x^2}$$

#### 3.1.1 plus plus

Die Funktion  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert.



**Funktionsgraf**

Der Funktionsgraf ist ein Hyperbelast. Die Funktion hat keine Nullstellen.

Das Verfahren von Newton-Raphson ergibt mit dem Startwert  $x_0 = 2$  :

$$\begin{aligned} x[0] &= 2 \\ x[1] &= -1/2 \\ x[2] &= 2 \\ x[3] &= -1/2 \\ x[4] &= 2 \\ x[5] &= -1/2 \end{aligned}$$

Für einen beliebigen Startwert  $x_0 = a \neq 0$  pendeln die Werte zwischen  $a$  und  $-\frac{1}{a}$ .

Beweis:

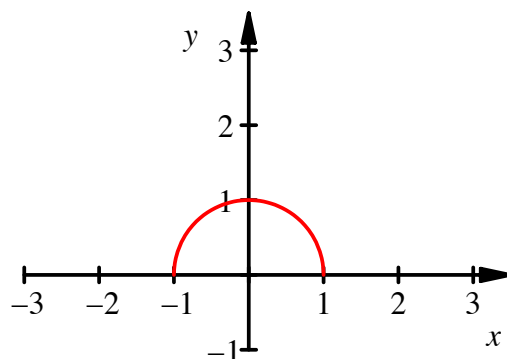
$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Damit erhalten wir für die Rekursion nach Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt{1+x_n^2}}{\frac{x_n}{\sqrt{1+x_n^2}}} = x_n - \frac{1+x_n^2}{x_n} = -\frac{1}{x_n}$$

### 3.1.2 plus minus

Die Funktion  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  ist auf  $[-1, 1]$  definiert.



**Funktionsgraf**

Der Funktionsgraf ist der obere Halbkreis des Einheitskreises. Die Funktion hat die Nullstellen  $\pm 1$ .

Das Verfahren von Newton-Raphson ergibt mit dem Startwert  $x_0 = 2$ :

$$\begin{aligned} x[0] &= 2 \\ x[1] &= 1/2 \\ x[2] &= 2 \\ x[3] &= 1/2 \\ x[4] &= 2 \\ x[5] &= 1/2 \end{aligned}$$

Für einen beliebigen Startwert  $x_0 = a \neq 0$  pendeln die Werte zwischen  $a$  und  $\frac{1}{a}$ .

Beweis:

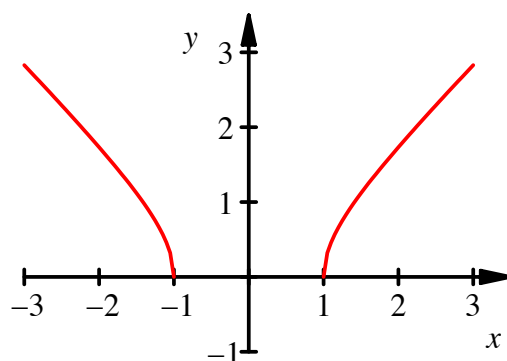
$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Damit erhalten wir für die Rekursion nach Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt{1-x_n^2}}{\frac{-x_n}{\sqrt{1-x_n^2}}} = x_n + \frac{1-x_n^2}{x_n} = \frac{1}{x_n}$$

### 3.1.3 minus plus

Die Funktion  $f(x) = \sqrt{-1+x^2}$  ist auf  $\mathbb{R} - (-1, 1)$  definiert.



**Funktionsgraf**

Der Funktionsgraf ist eine halbe Hyperbel. Die Funktion hat die Nullstellen  $\pm 1$ .

Das Verfahren von Newton-Raphson ergibt mit dem Startwert  $x_0 = 2$ :

$$\begin{aligned} x[0] &= 2 \\ x[1] &= 1/2 \\ x[2] &= 2 \\ x[3] &= 1/2 \\ x[4] &= 2 \\ x[5] &= 1/2 \end{aligned}$$

Für einen beliebigen Startwert  $x_0 = a \neq 0$  pendeln die Werte zwischen  $a$  und  $\frac{1}{a}$ .

Beweis:

$$f(x) = \sqrt{-1+x^2} \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{-1+x^2}}$$

Damit erhalten wir für die Rekursion nach Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt{-1+x_n^2}}{\frac{x_n}{\sqrt{-1+x_n^2}}} = x_n - \frac{-1+x_n^2}{x_n} = \frac{1}{x_n}$$

### 3.2 minus minus

Die Funktion  $f(x) = \sqrt{-1-x^2}$  ist für reelle Werte nicht definiert.

Das Verfahren von Newton-Raphson ergibt aber mit dem Startwert  $x_0 = 2$  :

$$\begin{aligned}x[0] &= 2 \\x[1] &= -1/2 \\x[2] &= 2 \\x[3] &= -1/2 \\x[4] &= 2 \\x[5] &= -1/2\end{aligned}$$

Für einen beliebigen Startwert  $x_0 = a \neq 0$  pendeln die Werte zwischen  $a$  und  $-\frac{1}{a}$ .

Beweis:

$$f(x) = \sqrt{-1-x^2} \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{-1-x^2}}$$

Damit erhalten wir für die Rekursion nach Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt{-1-x_n^2}}{\frac{-x_n}{\sqrt{-1-x_n^2}}} = x_n + \frac{-1-x_n^2}{x_n} = -\frac{1}{x_n}$$