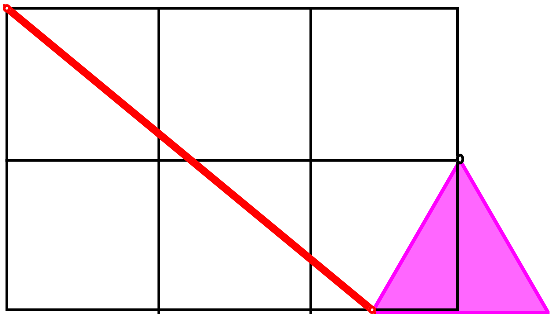
Hans Walser, [20070506b], [20131221]

Näherungskonstruktionen für die Kreiszahl π

1 Quadratraster und gleichseitiges Dreieck

Wie lang ist die rote Strecke?



Wie lang ist die rote Stecke?

Bearbeitung

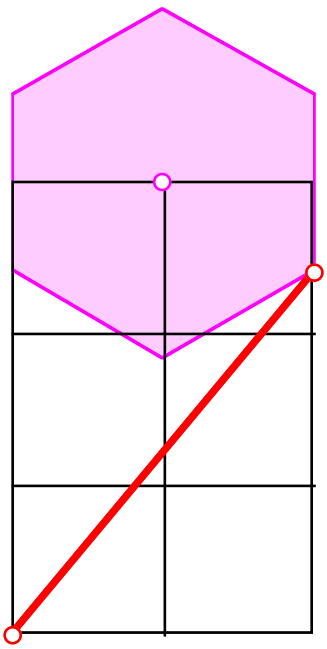
Wir setzen die Maschenweite des Quadratrasters gleich 1. Dann ist:

$$s = \sqrt{2^2 + \left(3 - \tan\left(30°\right)\right)^2} \approx 3.141533339$$

Diese Näherungskonstruktion der Kreiszahl π geht auf Adam Adamandy Kochanski (1631-1700) zurück. Sie wurde 1685 entwickelt.

2 Quadratraster und regelmäßiges Sechseck

Wie lang ist die rote Strecke?



Wie lang ist die rote Stecke?

Bearbeitung

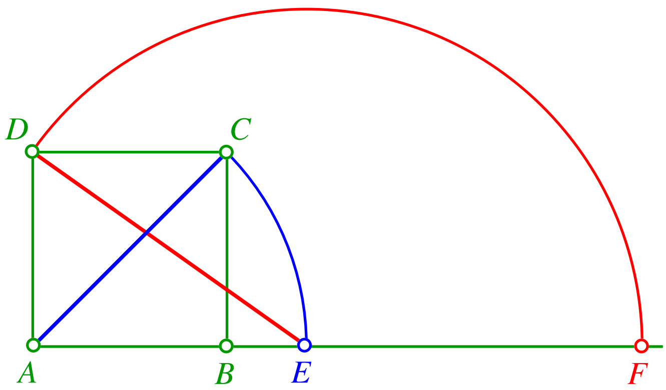
Wir setzen die Maschenweite des Quadratrasters gleich 1. Dann ist:

$$s = \sqrt{2^2 + \left(3 - \tan(30°)\right)^2} \approx 3.141533339$$

Diese Näherungskonstruktion der Kreiszahl π geht auf Adam Adamandy Kochanski (1631-1700) zurück. Sie wurde 1685 entwickelt.

3 Näherungskonstruktion für die Kreiszahl π

Wie gut ist die durch die Figur angedeutete Approximation der Kreiszahl π?



Approximation von π

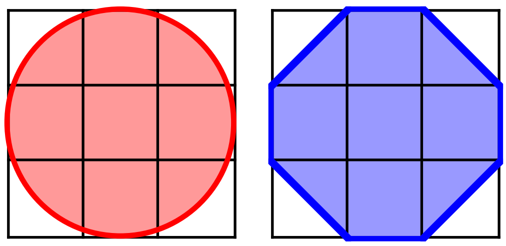
Ergebnis

$$\overline{AB} = 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = \overline{AE} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{ED} = \overline{EF} = \sqrt{3}$$

$$\overline{AF} = \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3.14626437$$

Die Zahl ist etwa 0.15% zu groß.

4 Näherungskonstruktion mit Achteck



Kreis und Achteck

a) Wie unterscheiden sich die Kreisfläche und die Achteckfläche? Welchen Näherungswert erhalten wir für die Kreiszahl π, wenn wir die beiden Flächen gleichsetzen?

b) Wie unterscheiden sich der Kreisumfang und der Achteckumfang? Welchen Näherungswert erhalten wir für die Kreiszahl π, wenn wir die beiden Umfänge gleichsetzen?

Bearbeitung

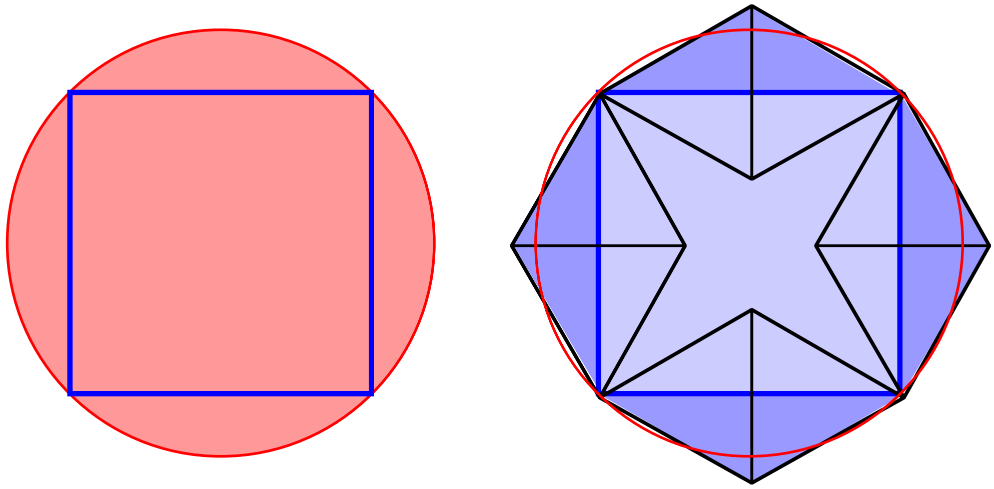
a) Kreisfläche = $1.5^2\pi \approx 7.06858$; Achteckfläche = 7. Die Achtecksfläche ist um etwa ein Prozent kleiner als die Kreisfläche. Bei Gleichsetzen der beiden Flächen ergibt sich für die Kreiszahl π der Näherungswert:

$$\pi \approx \frac{7}{1.5^2} = 3.\bar{1}$$

b) Kreisumfang = $3\pi \approx 9.42477796$; Achteckumfang = $4+4\sqrt{2} \approx 9.65685425$ Bei Gleichsetzen der beiden Umfänge ergibt sich für die Kreiszahl π der Näherungswert:

$$\pi \approx \frac{4+4\sqrt{2}}{3} \approx 3.21895$$

5 Näherungskonstruktion mit Achteck



Kreis und Achteck

Wir setzen an die Seiten eines Quadrates halbe gleichseitige Dreiecke an. Dadurch entsteht ein Achteck; dieses ist unregelmäßig. Es hat zwar gleich lange Seiten, aber die Winkel messen abwechslungsweise 120° und 150°.

a) Wie unterscheiden sich die Gesamtfläche dieses Achteckes und die Fläche des Umkreises des Quadrates? Welchen Nährungswert erhalten wir für die Kreiszahl π, wenn wir die beiden Flächen gleichsetzen?

b) Wie unterscheiden sich der Kreisumfang und der Achteckumfang? Welchen Näherungswert erhalten wir für die Kreiszahl π, wenn wir die beiden Umfänge gleichsetzen?

Bearbeitung

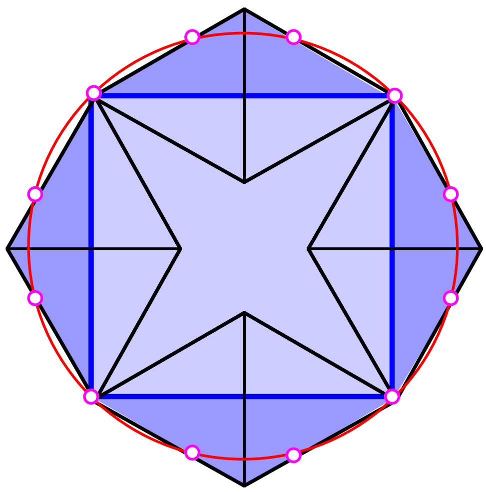
a) Kreisfläche $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \pi = \frac{\pi}{2} \approx 1.570796$; Achteckfläche $= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 1.577350$. Die Achteckfläche ist etwa 0.4% größer als die Kreisfläche. Bei Gleichsetzen der beiden Flächen ergibt sich für die Kreiszahl π der Näherungswert:

$$\pi \approx \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 3.1547$$

b) Kreisumfang $= \sqrt{2}\pi \approx 4.442883$; Achteckumfang $= 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 4.618802$ Bei Gleichsetzen der beiden Umfänge ergibt sich für die Kreiszahl π der Näherungswert:

$$\pi \approx \frac{\frac{8}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{6}} \approx 3.265986$$

Bemerkung: Die Schnittpunkte des Achteckes mit dem Umkreis des Quadrates bilden ein regelmäßiges Zwölfeck.



Regelmäßiges Zwölfeck