

Hans Walser, [20151218]

Mühlespiel

1 Das Problem

24 ganze Zahlen, welche eine arithmetische Folge bilden, sollen so in die Felder eines Mühlespiels (Abb. 1) gesetzt werden, dass sich bei jeder Mühle (drei durch eine gerade Linie verbundene Felder) dieselbe Summe s ergibt.

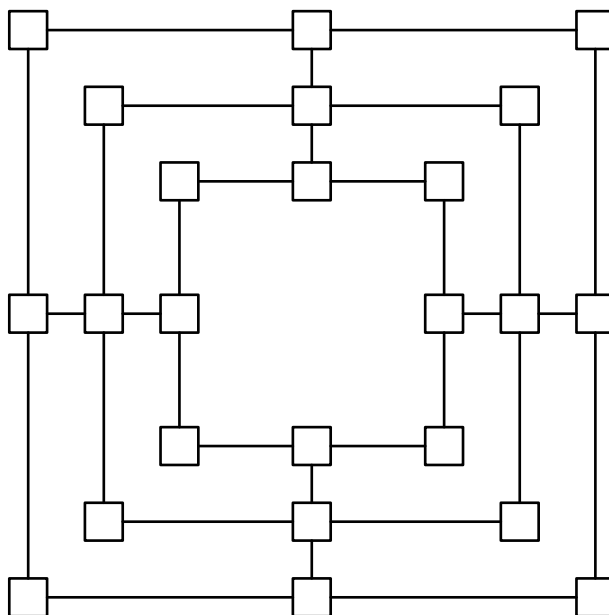


Abb. 1: Mühlespiel

2 Die Unlösung

Das Problem ist unlösbar.

3 Bearbeitung

Die 24 Zahlen sind von der Form

$$z_n = a + bn; \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad n \in \{1, 2, \dots, 24\} \quad (1)$$

Zunächst kann die additive Konstante a weggelassen werden, da sie keinen Einfluss auf die Lösbarkeit des Problems hat.

Wenn es nun eine Lösung gibt, sind alle Zahlen Vielfache von b . Wir können also die Zahlen durch b dividieren. Daraus folgt: Wenn es eine Lösung gibt, gibt es auch eine Lösung mit

Im Beispiel der Abbildung 3 haben wir eine Punktsymmetrie.

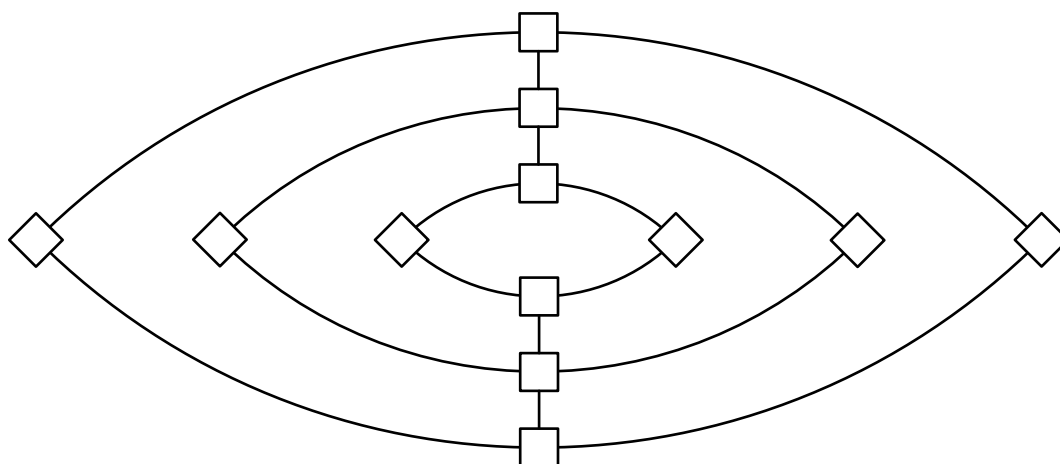


Abb. 3: Punktsymmetrie

Im Beispiel der Abbildung 4 haben wir eine dreiteilige Drehsymmetrie und im Beispiel der Abbildung 5 eine fünfteilige Drehsymmetrie.

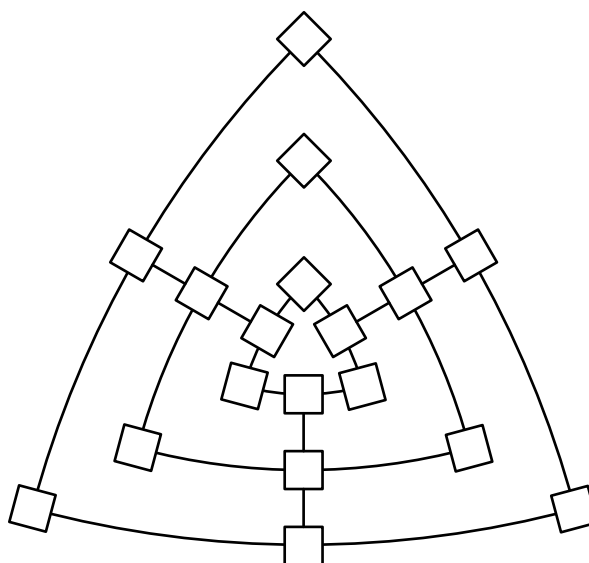


Abb. 4: Dreiteilige Drehsymmetrie

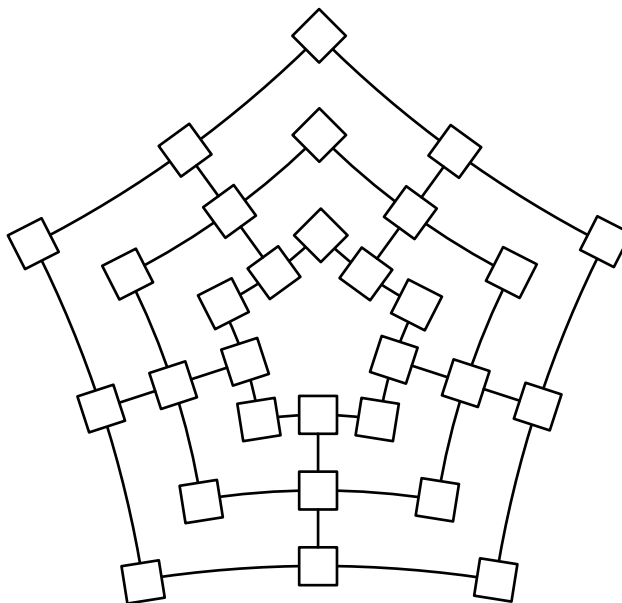


Abb. 5: Fünfteilige Drehsymmetrie

4.2 Unlösbarkeit

Für den Fall einer k -teiligen Drehsymmetrie haben wir:

$$S = \sum_{n=1}^{6k} n = 3k(6k+1) = 18k^2 + 3k \quad (5)$$

Wir haben $4k$ Mühlen. Somit ist:

$$\begin{aligned} 4ks &= 2S \\ s &= \frac{18k^2+3k}{2k} = 9k + 1.5 \end{aligned} \quad (6)$$

Die Mühlensumme s ist also immer echt halbzahlig. Widerspruch.