

Hans Walser, [20131223]

## Matterhorn

### 1 Worum geht es?

Es wird ein Bauteil vorgestellt, mit dem sich die Ebene parkettieren lässt. Insbesondere können auch spiralförmige Parkette ausgelegt werden. Es gibt eine reichhaltige Literatur darüber.

### 2 Der Parkettstein

Wir beginnen mit einem regelmäßigen Vieleck mit  $6n$ ,  $n = 2, 3, 4, 5, \dots$ , Ecken und zerlegen es in Sektoren gemäß Abbildung 1. Der Faktor 6 in der Eckenzahl garantiert die Existenz einer Diagonale gleicher Länge wie der Umkreisradius.

Die Abbildung 1 zeigt die Situation für  $n = 2, 3$  und 4.

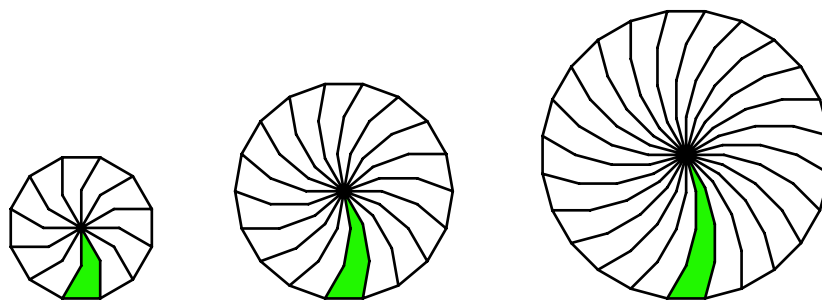


Abb. 1: Sektoren

Die beiden Sektorengrenzen sind jeweils kongruent zu  $n$  aufeinander folgenden Kanten des regelmäßigen Vieleckes. Ein einzelner Sektor ist unser Parkettstein.

Wir beschränken uns in unserer Studie auf den Fall  $n = 2$ , also einen Sektor im regelmäßigen Zwölfeck. Die Abbildung 2 zeigt die Winkel dieses Parkettsteins.

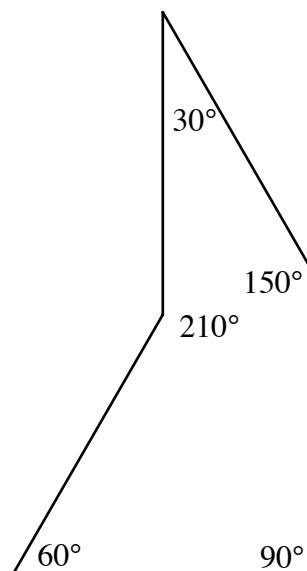
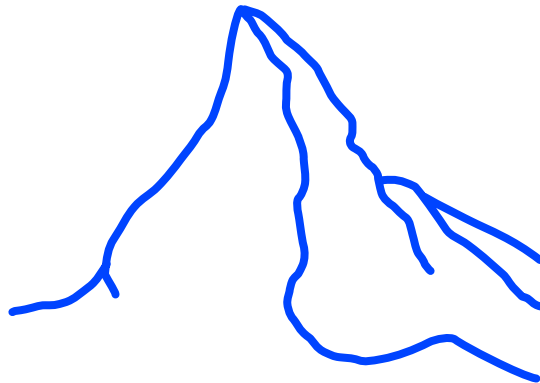


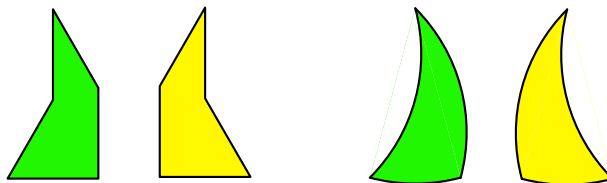
Abb. 2: Winkel

Der Parkettstein erinnert an das Matterhorn (Abb. 3):



**Abb. 3: Matterhorn**

Wir werden den Parkettstein auch in seiner spiegelbildlichen Form verwenden, ebenso gelegentlich mit kreisförmigen Randlinien (Abb. 4). Die Radien der Begrenzungsbögen sind gleich dem Umkreisradius des ursprünglichen Zwölfecks.

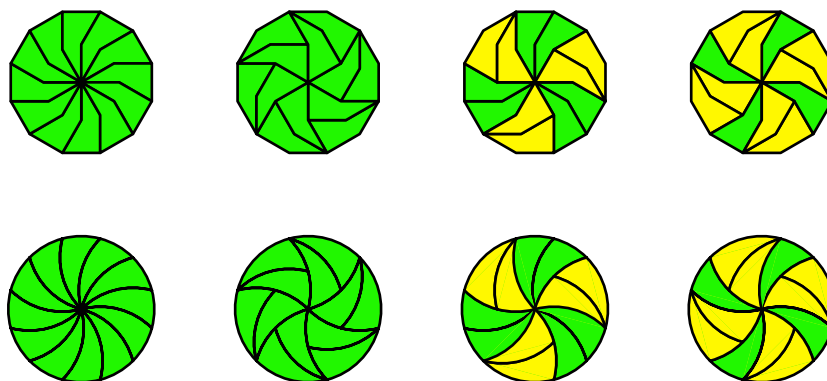


**Abb. 4: Bausteine**

### 3 Beispiele

#### 3.1 Zwölfeck und Kreis

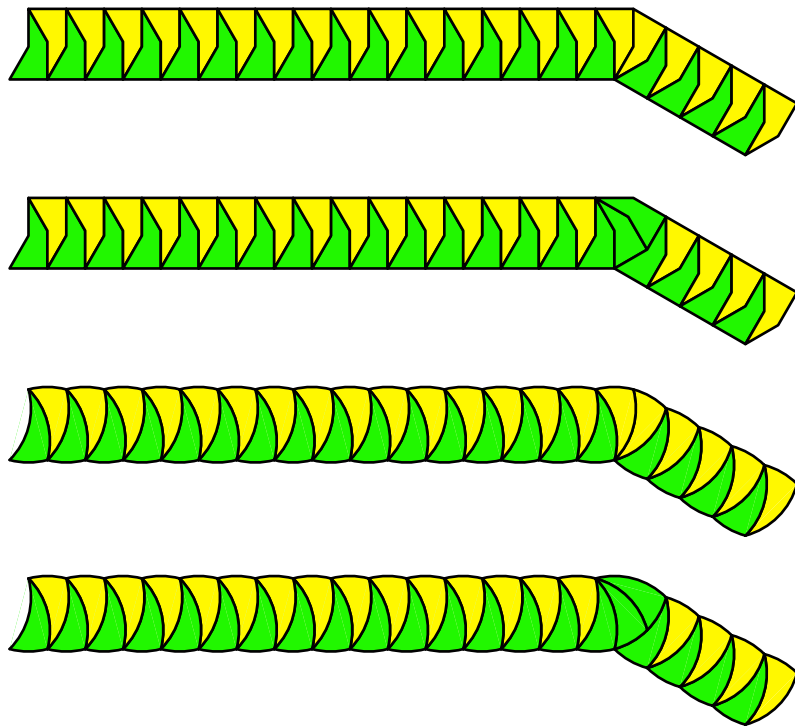
Das Zwölfeck und Kreis können auf verschiedene Arten zusammengesetzt werden.



**Abb. 5: Zwölfeck und Kreis**

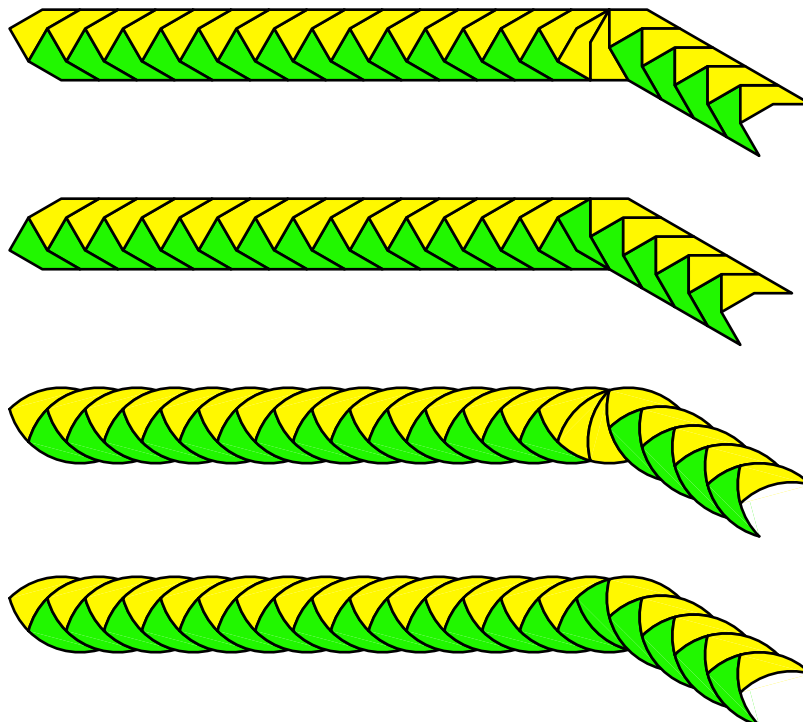
#### 3.2 Bänder

Die Abbildung 6 zeigt Bänder vom gleichen Typus, aber mit unterschiedlichen Gestaltungen der Knickstelle. Der gerade Teil der Bänder hat eine Schubspiegelsymmetrie.



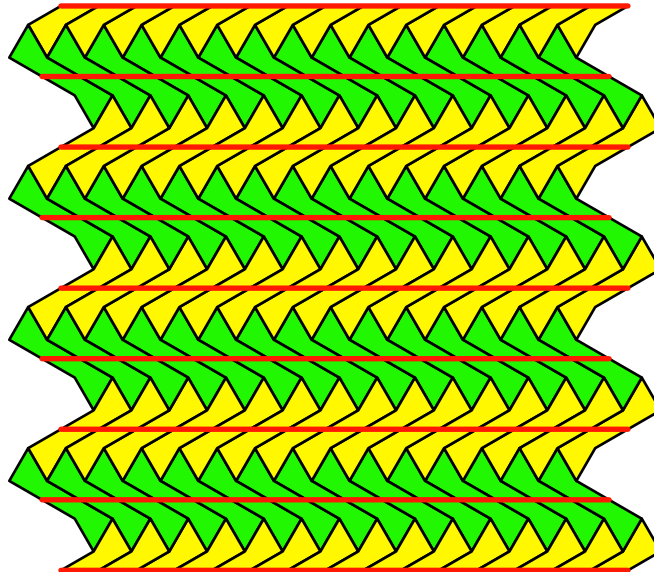
**Abb. 6: Bänder**

Die Abbildung 7 zeigt einen anderen Typus.



**Abb. 7: Andere Bänder**

Bei den glattrandigen Beispielen der Abbildung 7 unterliegen wir einer optischen Täuschung, indem es scheint, dass die Bänder gegen links breiter werden. Die Abbildung 8 illustriert dieselbe optische Täuschung.



**Abb. 8: Sind die roten Linien parallel?**

Der Täuschungseffekt entsteht dadurch, dass wir bestrebt sind, die Trajektorien durch die schrägen Richtungsfelder als Orthogonal-Trajektorien zu sehen. Viele optische Täuschungen arbeiten mit diesem Prinzip.

Die Abbildung 9 zeigt ein weiteres Band. Es hat keine Schubspiegelsymmetrie wie die Bänder der Abbildungen 6 und 7, hingegen eine Punktspiegelsymmetrie.

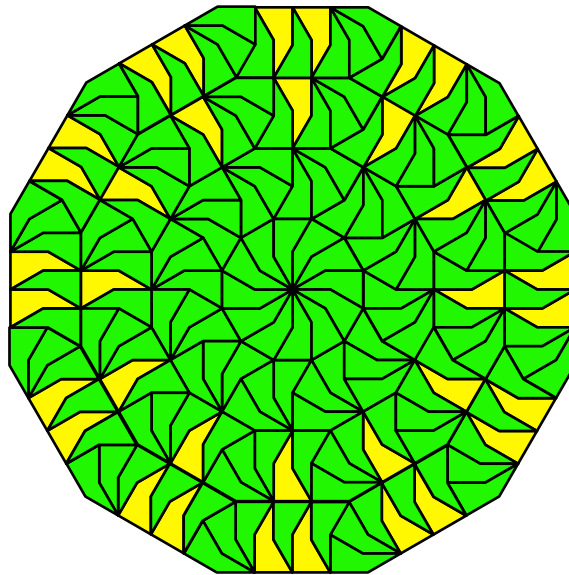


**Abb. 9: Punktspiegelsymmetrie**

Es ist mir nicht gelungen, dieses Band elegant abzuknicken. Auch lässt sich dieses Band nicht mit krummlinigen Parkettsteinen auslegen.

### 3.3 Ringe

Wir können aus den glattrandigen Bändern der Abbildungen 6 oder 7 durch geeignetes Abknicken Zwölfecke herstellen, die ein gegebenes zentrales Zwölfeck umfassen. Die Abbildung 10 zeigt ein Beispiel.

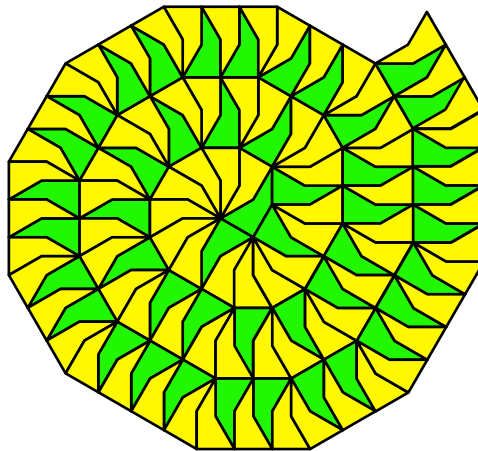


**Abb. 10: Ringe um das Zwölfeck**

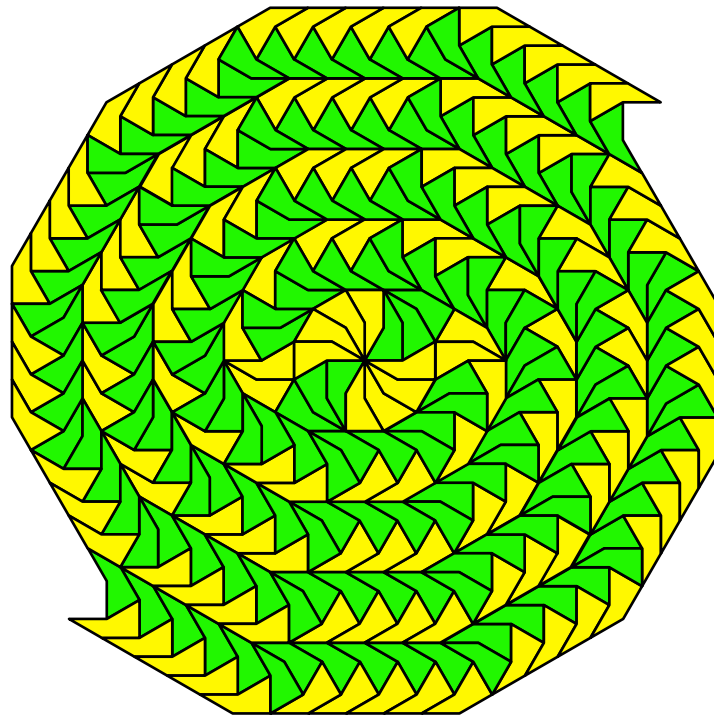
### 3.4 Spiralen

Die Spiralen entstehen, indem wir die glattrandigen Bänder der Abbildungen 6 oder 7 mit geeigneten Knickstellen „aufwickeln“. Es sind daher eckige archimedische Spiralen. Über Spiralen siehe [Heitzer 1998]. Im Folgenden einige Beispiele.

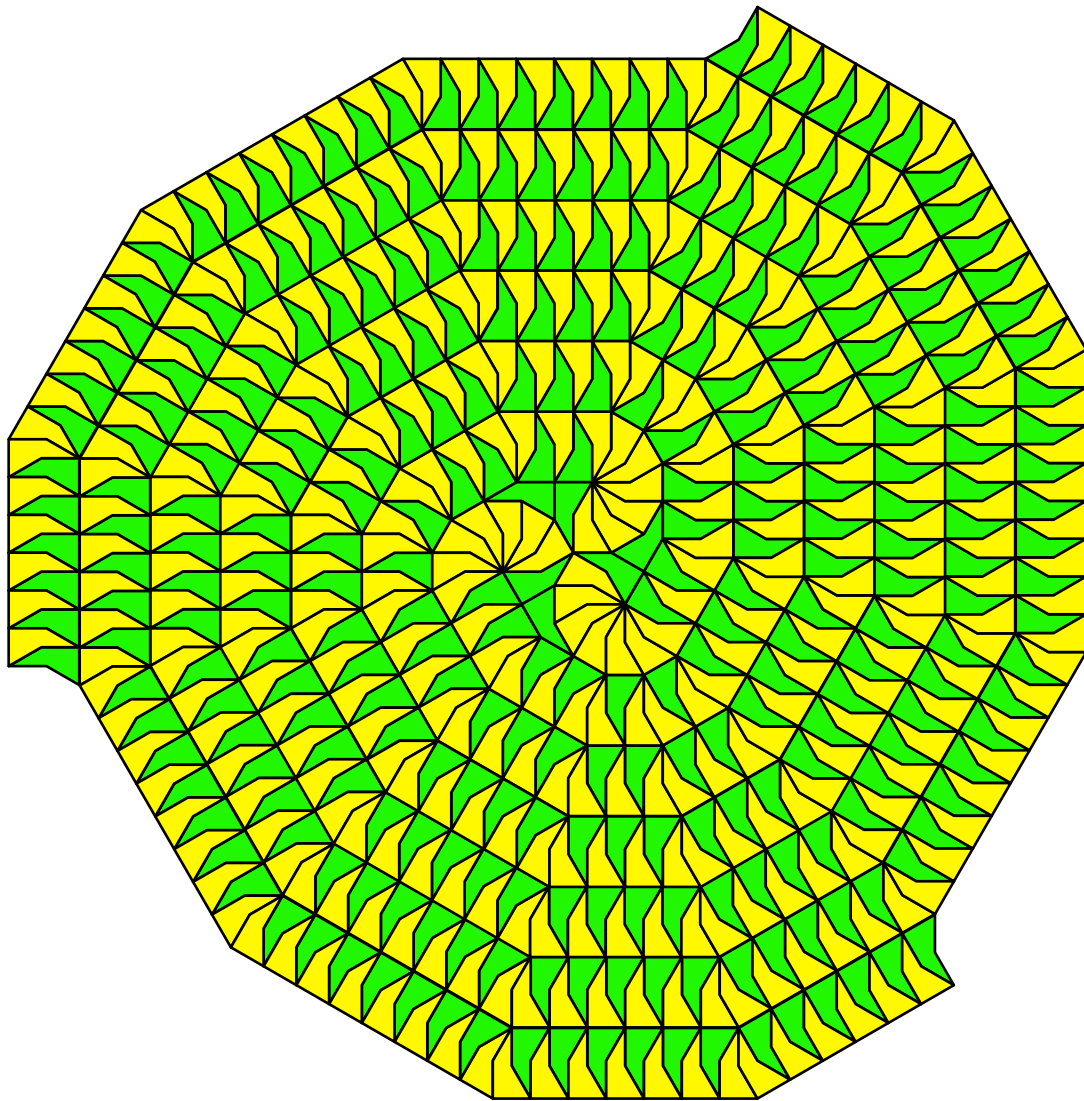
Das Interessanteste beim Bau dieser Spiralen ist der Start im Zentrum.



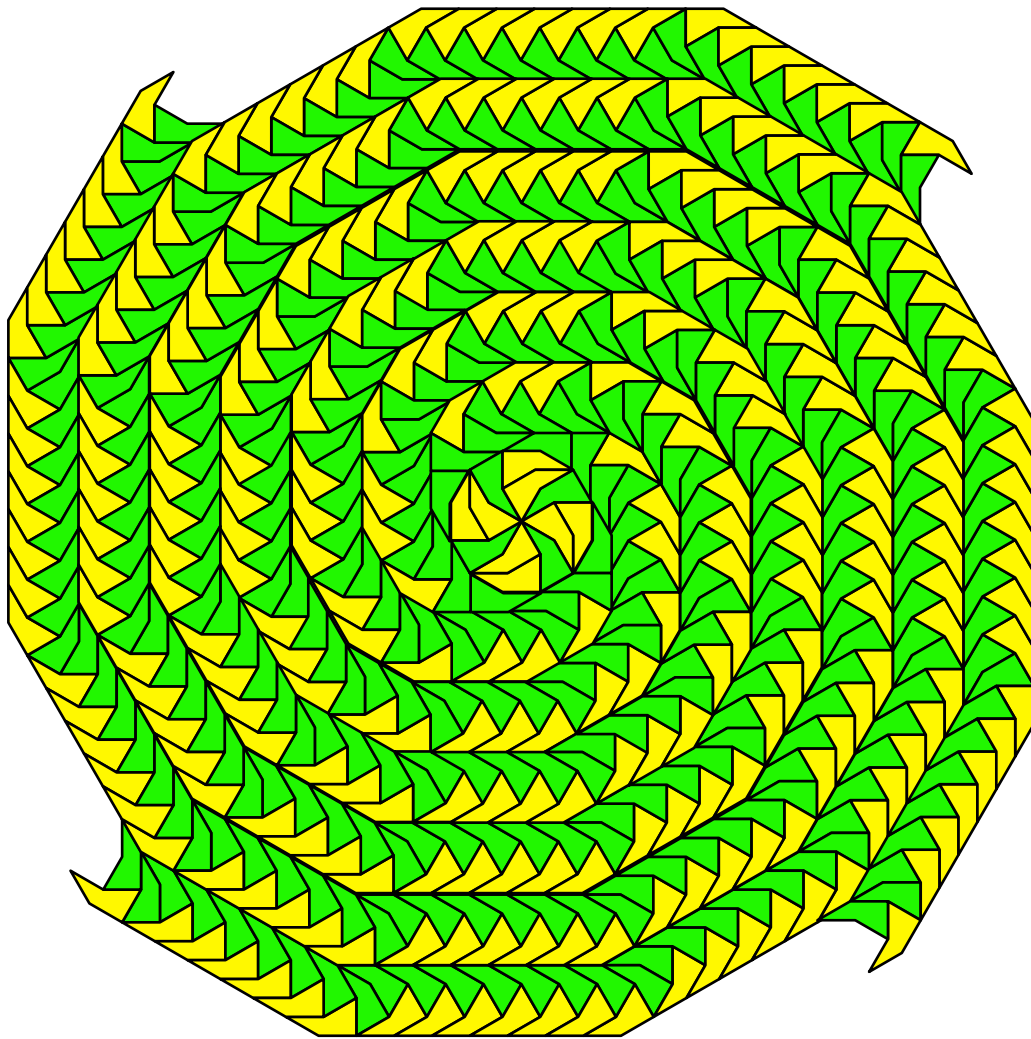
**Abb. 11: Eckige archimedische Spirale**



**Abb. 12: Spirale mit zwei Armen**



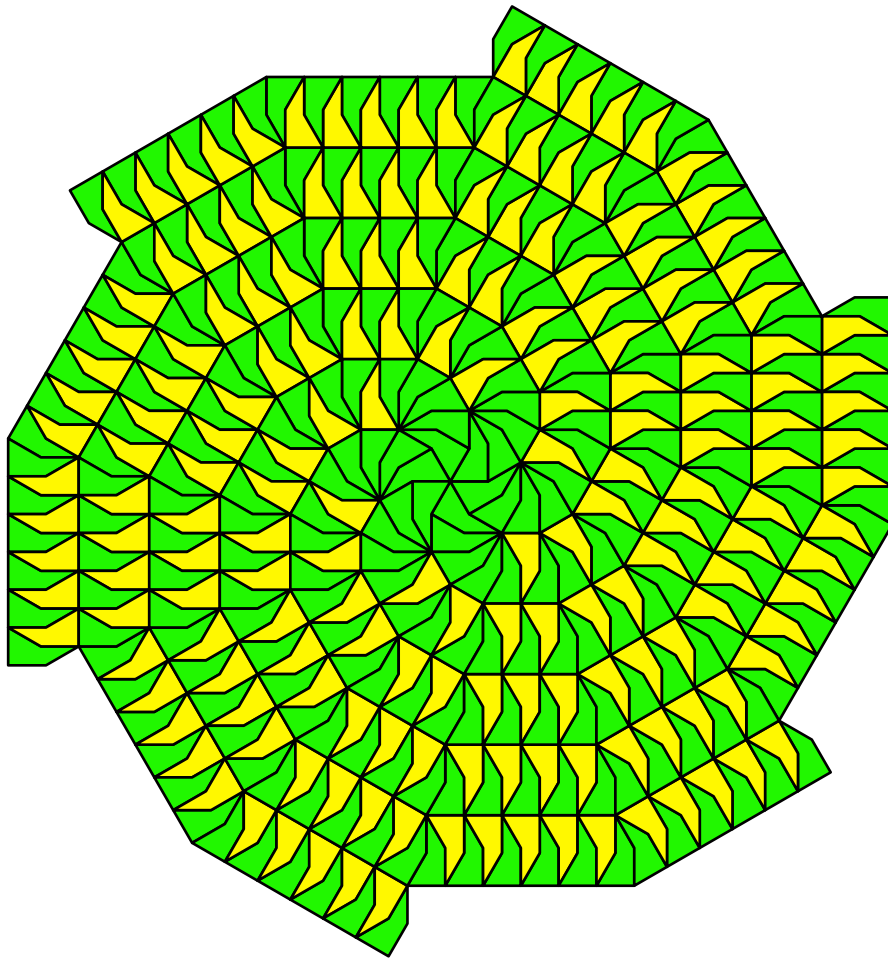
**Abb. 13: Spirale mit drei Armen**



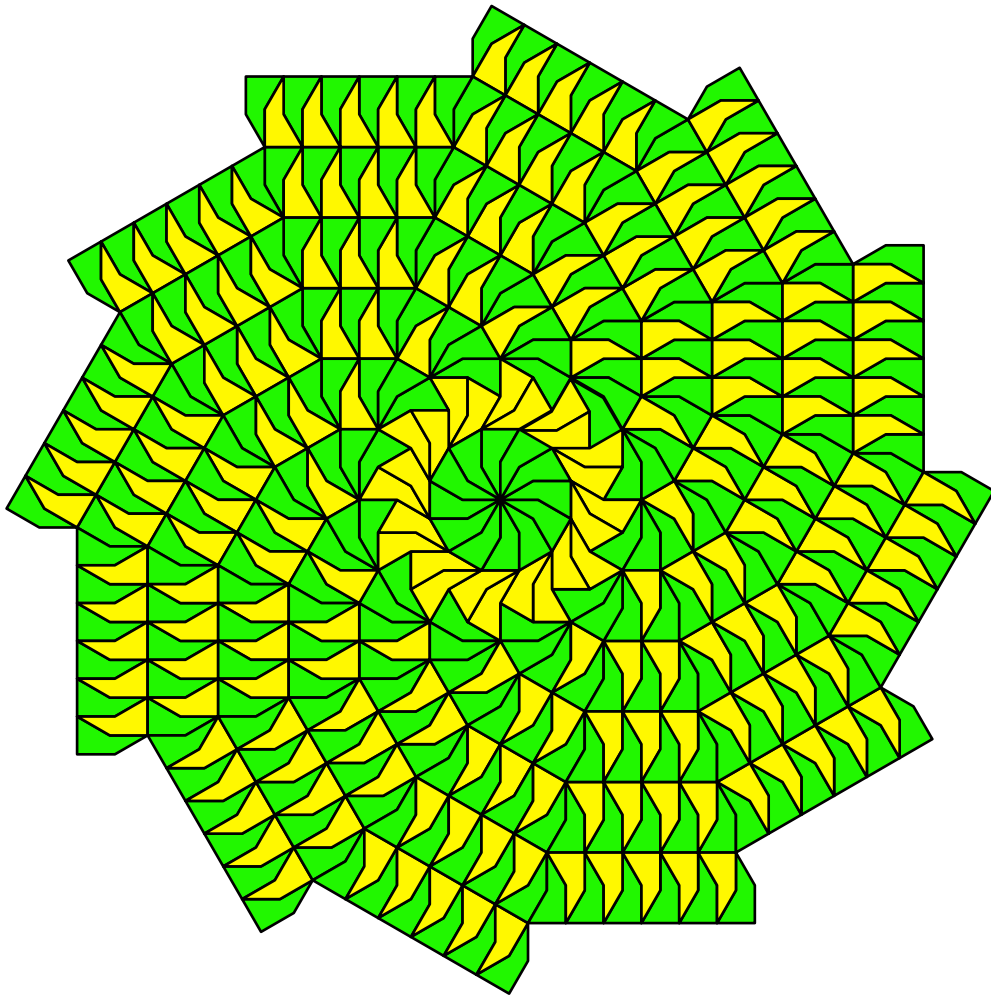
**Abb. 14: Spirale mit vier Armen**

Für eine Spirale mit fünf Armen müssten wir mit dem Bauteil aus einem 30-Eck arbeiten.





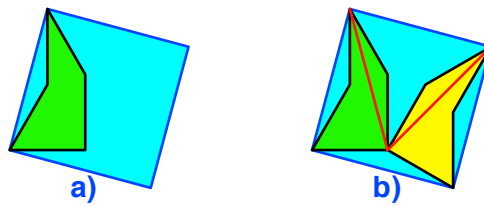
**Abb. 15: Spirale mit sechs Armen**



**Abb. 16: Spirale mit zwölf Armen**

#### 4 Der Parkettstein und das Quadrat

Wir umschreiben dem Parkettstein ein Quadrat gemäß Abbildung 17a.



**Abb. 17: Parkettstein und Quadrat**

Der Parkettstein macht dann flächenmäßig ein Viertel des Quadrates aus. Die Abbildung 17b gibt einen Tipp, um das ein zusehen.

**Literatur**

- [Goldberg 1955] Goldberg, Michael: Central Tessellations. *Scripta Mathematica* (21) 1955, p. 253-260
- [Grünbaum/Shephard 1979] Grünbaum, Branko / G. c. Shephard: Spiral Tilings and Versatiles. *Mathematics Teaching*. No. 88, September 1979, p. 50-51
- [Grünbaum/Shephard 1987] Grünbaum, Branko / Shephard, G. C.: *Tilings and Patterns*. New York: Freeman 1987. ISBN 0-7167-1193-1
- [Hatch 1978] Hatch, Gillian: Tessellations with Equilateral Reflex Polygons. *Mathematics Teaching* (84) 1978, p. 32
- [Heitzer 1998] Heitzer, Johanna: *Spiralen, ein Kapitel phänomenaler Mathematik*. Leipzig: Klett 1998. ISBN 3-12-720044-7
- [Lindgren 1972] Lindgren, H.: *Geometric Dissections*. Revised and enlarged by Greg Frederickson. New York: Dover 1972.
- [Simonds 1977] Simonds, David R.: Central Tessellations with an Equilateral Pentagon. *Mathematics Teaching* (83) 1977, p. 36-37
- [Simonds 1978] Simonds, David R.: Untitled note. *Mathematics Teaching* (84) 1978, p. 33
- [Vorderberg 1936] Vorderberg, Heinz: Zur Zerlegung der Umgebung eines ebenen Bereiches in kongruente. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 46 (1936), S. 229-231
- [Vorderberg 1937] Vorderberg, Heinz: Zur Zerlegung der Ebene in kongruente Bereiche in Form einer Spirale. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 47 (1937), S. 159-160