Hans Walser, [20150624]

Lucas-Zahlen

1 Worum geht es?

Visualisierungen der Lucas-Zahlen

2 Was sind die Lucas-Zahlen?

Die Zahlen der Folge 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ... heißen *Lucas-Zahlen*.

Bezeichnung: $L_1 = 1, L_2 = 3, L_3 = 4, \ldots$

Rekursive Darstellung:

Startwerte $L_1 = 1$ und $L_2 = 3$, Rekursion:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

Es handelt sich also um die bekannte Fibonacci-Rekursion.

Explizite Darstellung:

$$L_n = \Phi^n + \left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^n$$

Dabei ist $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (goldener Schnitt, vgl. (Walser 2013)).

Grenzwert des Quotienten aufeinanderfolgender Lucas-Zahlen:

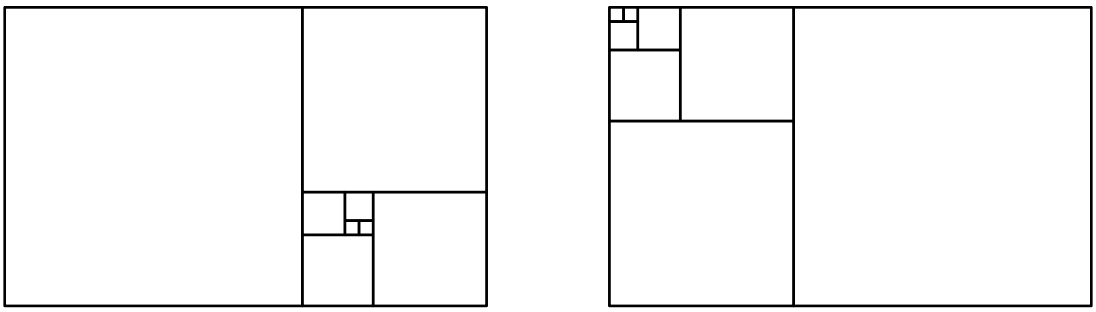
$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \Phi$$

Die Lucas-Zahlen haben also sehr viel mit den Fibonacci-Zahlen gemeinsam. Vgl. (Walser 2012). Daher werden sich auch die Visualisierungen an jene der Fiboancci-Zahlen anlehnen.

Person: François Edouard Anatole Lucas (1842-1891).

3 Darstellung mit Quadraten

Die Abbildung 1 zeigt zwei verschiedene Anordnungen der Fibonacci-Quadrate.



a) b)

Abb. 1: Fibonacci-Quadrate

Die Seitenlängen der Quadrate sind die Fibonacci-Zahlen 1, 1,2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Die Anordnung der Abbildung 1a) ist spiralförmig. Bei der Anordnung der Abbildung 1b) wird von links oben nach rechts unten gearbeitet.

Beide Anordnungen lassen sich auf Lucas-Zahlen übertragen. Wir haben aber eine Startlücke (Abb. 2 und 3).

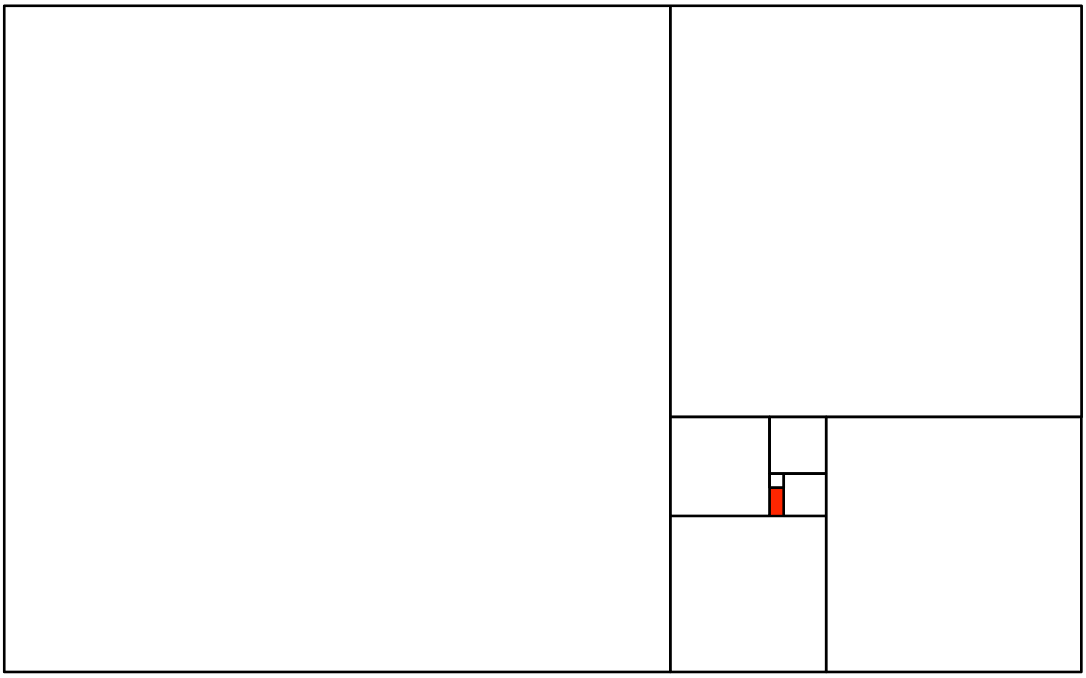


Abb. 2: Lucas-Zahlen-Spirale mit Startlücke

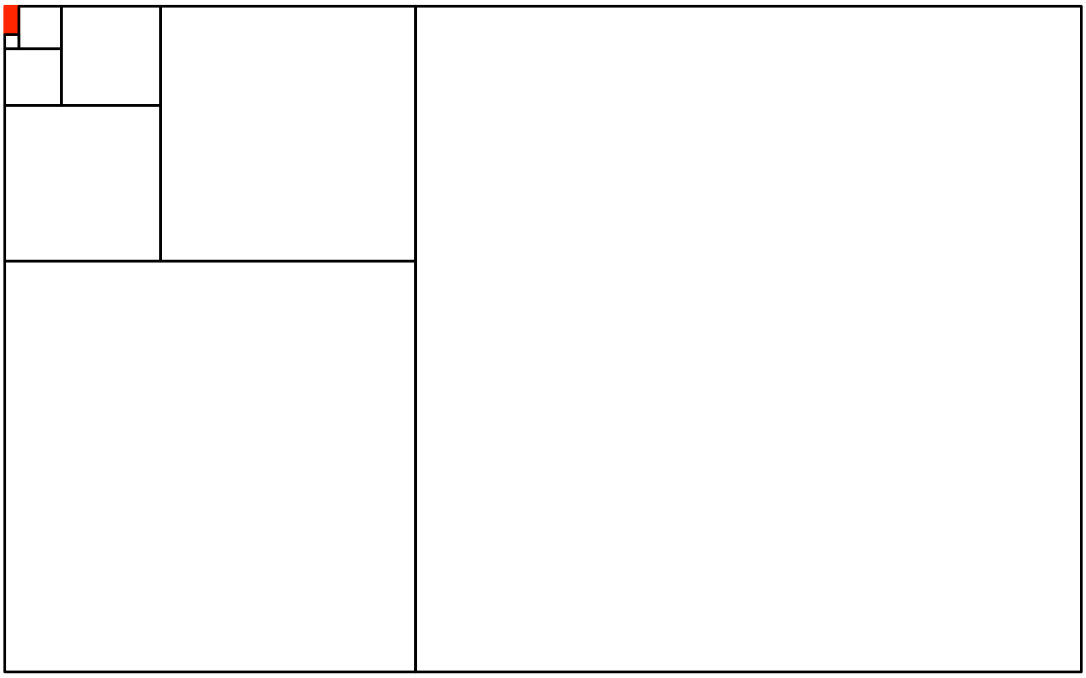


Abb. 3: Lucas-Zahlen mit Startlücke

4 Trapeze und Rhomben

Die Abbildung 4 zeigt eine Visualisierung der Lucas-Zahlen mit Trapezen und Rhomben. Die Figuren haben Winkel von 60° und 120°.

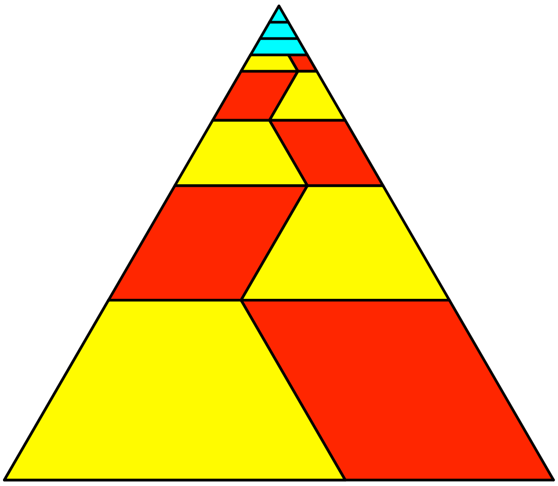


Abb. 4: Trapeze und Rhomben

Die Seitenlängen der Rhomben sind die Lucas-Zahlen. Die Seitenlängen der Trapeze sind jeweils drei aufeinanderfolgende Lucas-Zahlen.

Durch Einbetten der Figur in ein gleichseitiges Dreieck lesen wir folgende Beziehung ab:

$$L_{n+2} = 3 + \sum_{k=1}^{n} L_k$$

Der Korrekturterm 3 ergibt sich durch die hellblaue Spitze des Dreieckes.

Für das Fibonacci-Analogon siehe (Plaza and Walser 2013).

5 Rhomben allein

Wir denken uns je zwei Rhomben am gemeinsamen Eckpunkt gelenkig verbunden.

Wir können sie dann zusammenklappen zur Figur der Abbildung 5. Der Klappwinkel ist jeweils 60°. Die Endfigur ist ein affines Bild der Figur der Abbildung 3.

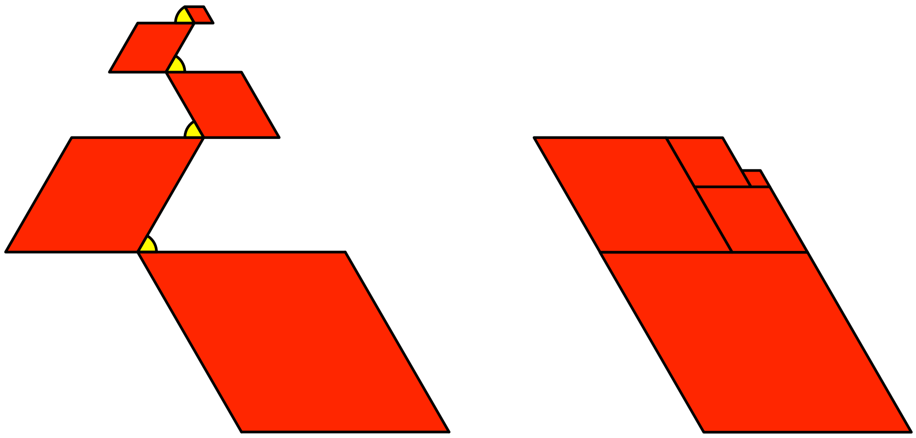


Abb. 5: Zusammenklappen der Rhomben um 60°

Wenn wir um den 120°-Winkel zusammenklappen, ergibt sich die Situation der Abbildung 6.

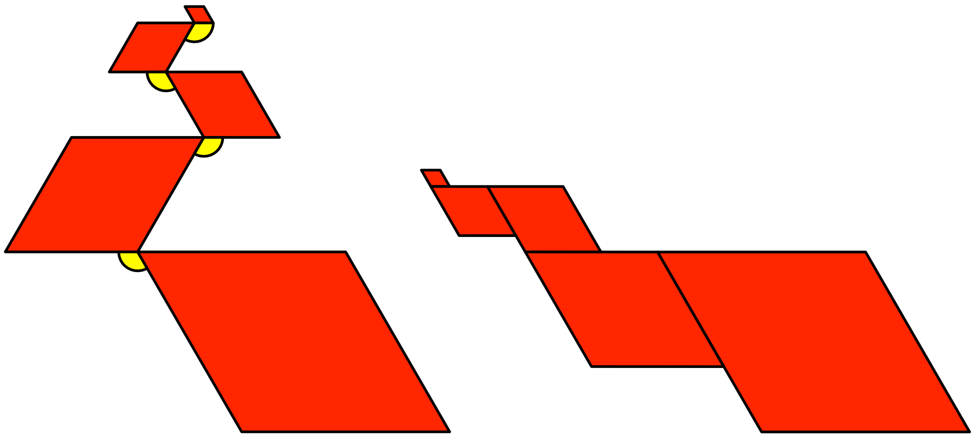


Abb. 6: Zusammenklappen der Rhomben um 120°

6 Trapeze allein

Nun klappen wir die Trapeze um 60° zusammen (Abbildung 7).

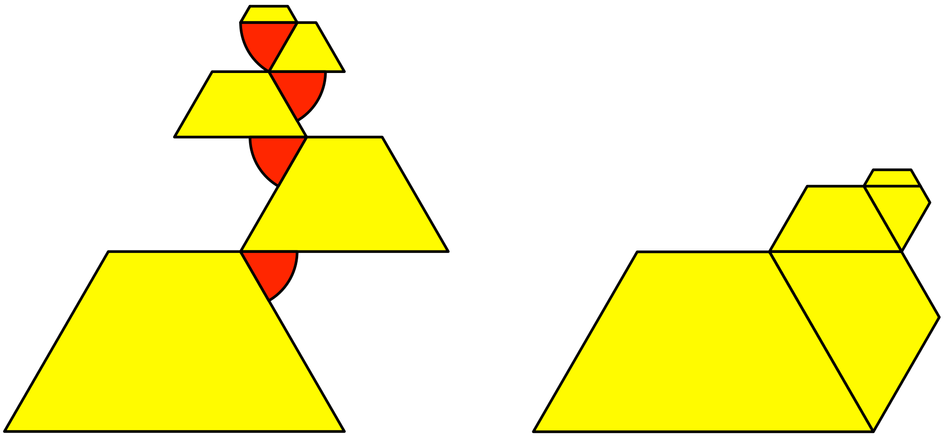


Abb. 7: Zusammenklappen der Trapeze um 60°

Aus sechs Teilen können wir einen Stern zusammensetzen (Abbildung 8).

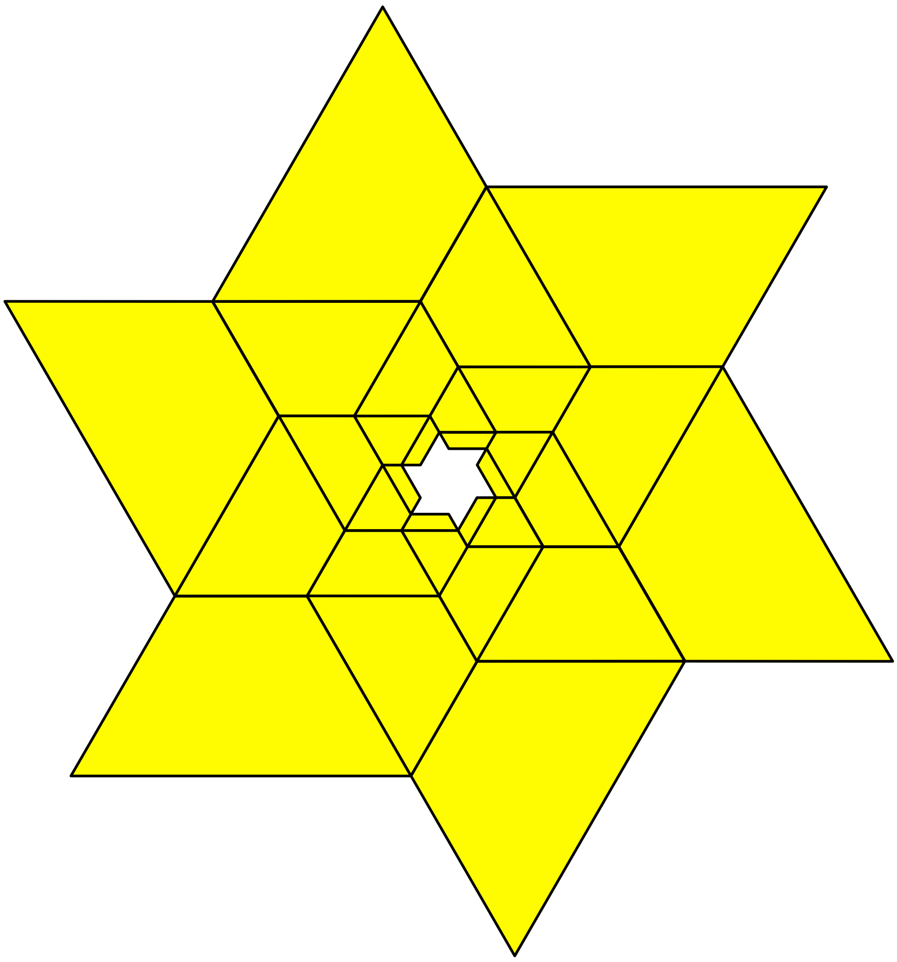


Abb. 8: Lucas-Stern

Nun klappen wir die Trapeze um 120° zusammen (Abbildung 9).

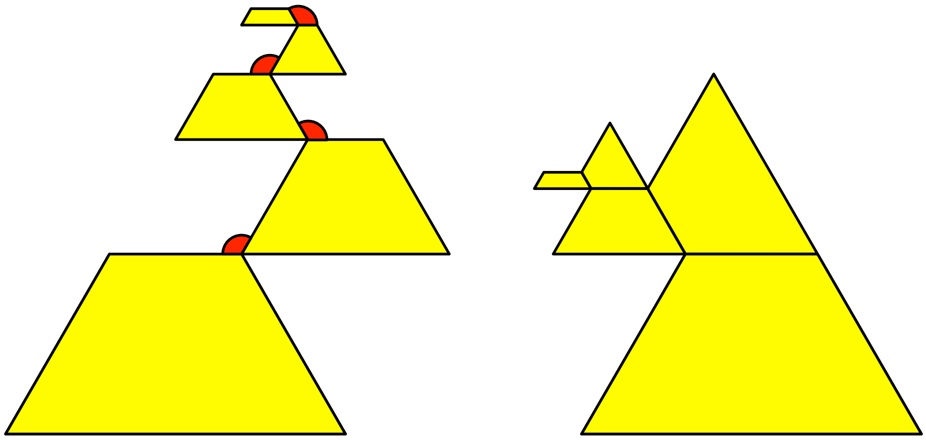


Abb. 9: Zusammenklappen der Trapeze um 120°

Auch daraus lässt sich mit 6 Teilen ein Stern bauen (Abb. 10). Er ist spiegelbildlich zum Stern der Abbildung 8.

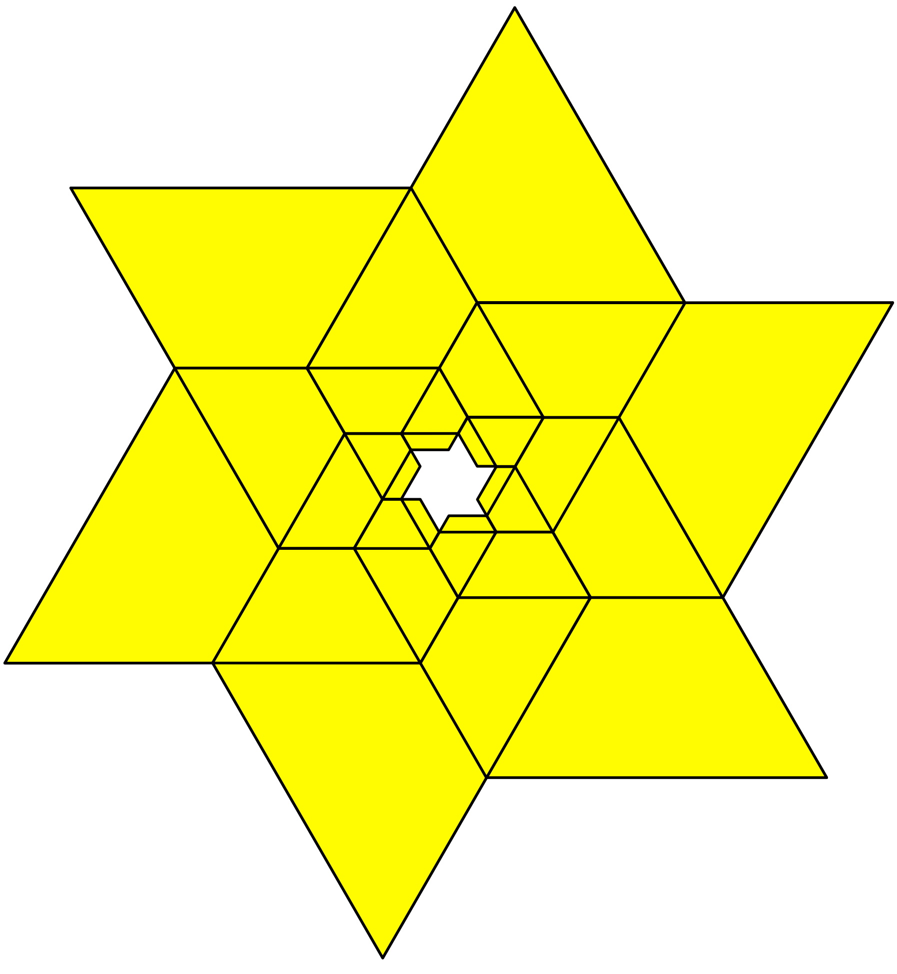


Abb. 10: Stern

Literatur

Plaza, Angel and Walser, Hans (2013): Proof Without Words: Fibonacci Triangles and Trapezoids. Mathematics Magazine. 86 (2013) p. 55.

Walser, Hans (2012): Fibonacci. Zahlen und Figuren. Leipzig, EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-60-8.

Walser, Hans (6. Auflage). (2013). Der Goldene Schnitt. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.