Hans Walser, [20180713]

Lote auf die Sinuskurve

1 Problemstellung

Von einem Punkt $P(x_P, y_P)$ aus sollen sämtliche Lote auf die Sinuskurve $y = \sin(x)$ gezeichnet werden. Wie viele Lote gibt es?

Die Abbildung 1 zeigt das Beispiel für $P(0,7)$. Die Lote sind unregelmäßig verteilt. Für Steigungswinkel zwischen -45° und 45° gibt es keine Normalen, da die Steigungswinkel der zu den Loten orthogonalen Sinustangenten sich in diesem Bereich bewegen.

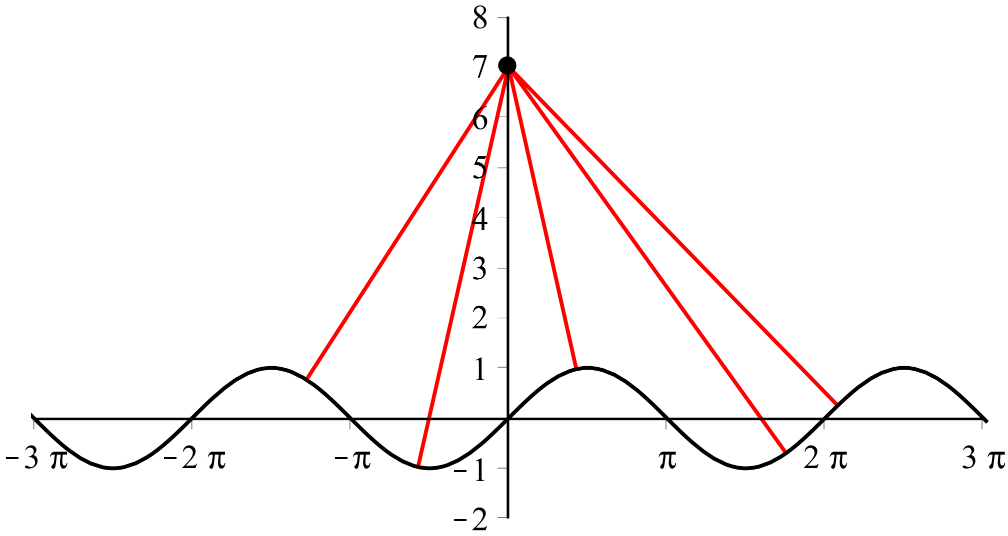

Abb. 1: Beispiel

2 Berechnungen

Mit $Q(t,\sin(t))$ bezeichnen wir einen laufenden Punkt auf der Sinuskurve. Für ein Lot von P nach Q muss der Abstand

$$\overline{QP}(t)=\sqrt{(t-x_P)^2+(\sin(t)-y_P)^2} \tag{1}$$

stationär werden. Die Abbildung 2 gibt rot die Abstandsfunktion für $P(0,7)$. Wir sehen, dass es nur wenige stationäre Stellen hat.

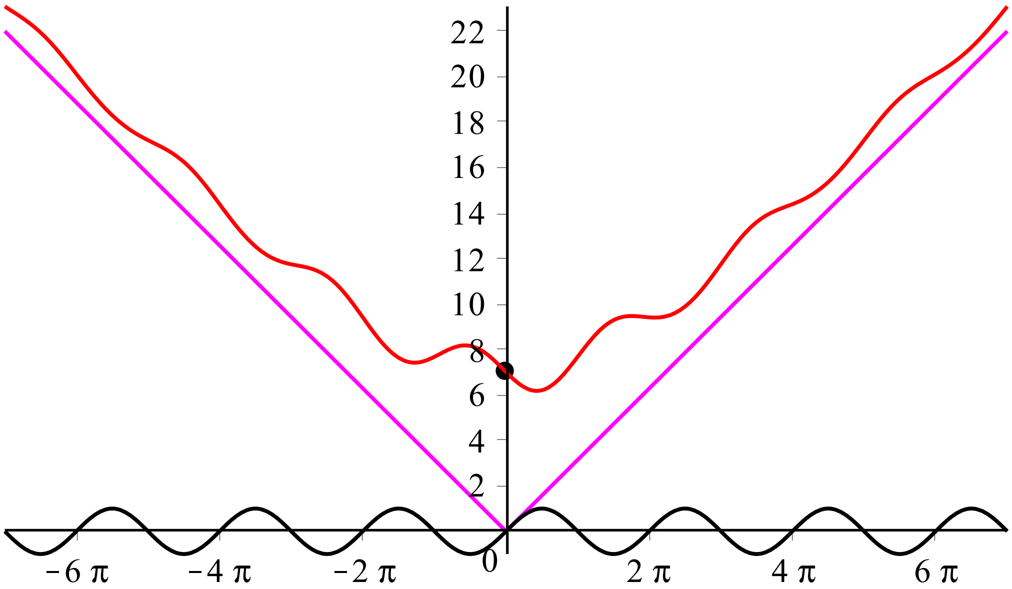

Abb. 2: Abstand

Für große t-Werte verhält sich die Funktion etwa wie die Betragsfunktion (magenta).

Statt mit der Funktion (1) können wir rechnerisch einfacher mit dem Quadrat davon arbeiten, also mit:

$$f(t)=\left(\overline{QP}(t)\right)^2=(t-x_P)^2+(\sin(t)-y_P)^2 \tag{2}$$

Die Abbildung 3 zeigt die Funktion (2) in anderer Skalierung (nicht mehr 1:1).

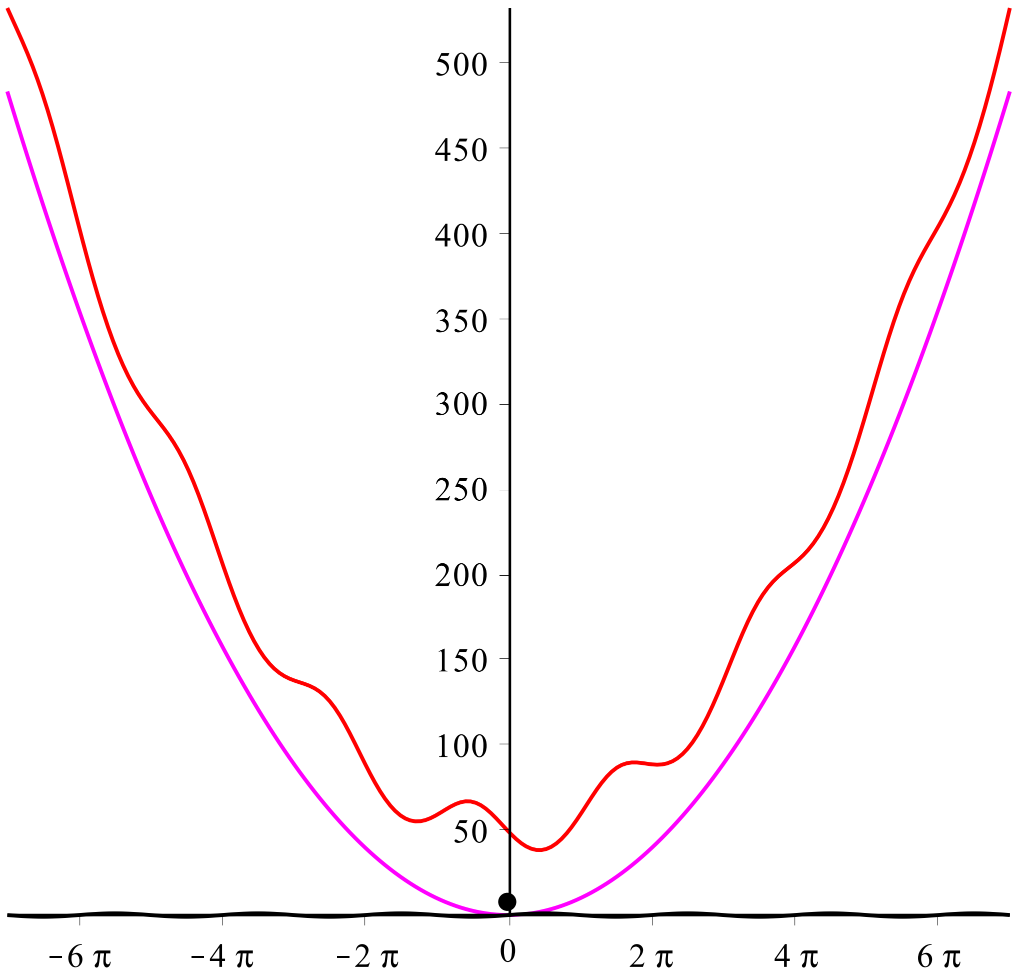

Abb. 3: Quadrat der Abstandsfunktion

Für große t-Werte verhält sich die Funktion etwa wie die Quadratfunktion.
In den stationären Stellen verschwindet die Ableitung:

$$f'(t) = 2(t - x_P) + 2(\sin(t) - y_P)\cos(t) \overset{!}{=} 0 \tag{3}$$

Die Abbildung 4 zeigt den Grafen der Ableitung (blau). Es gibt nur fünf Nullstellen der Ableitung.

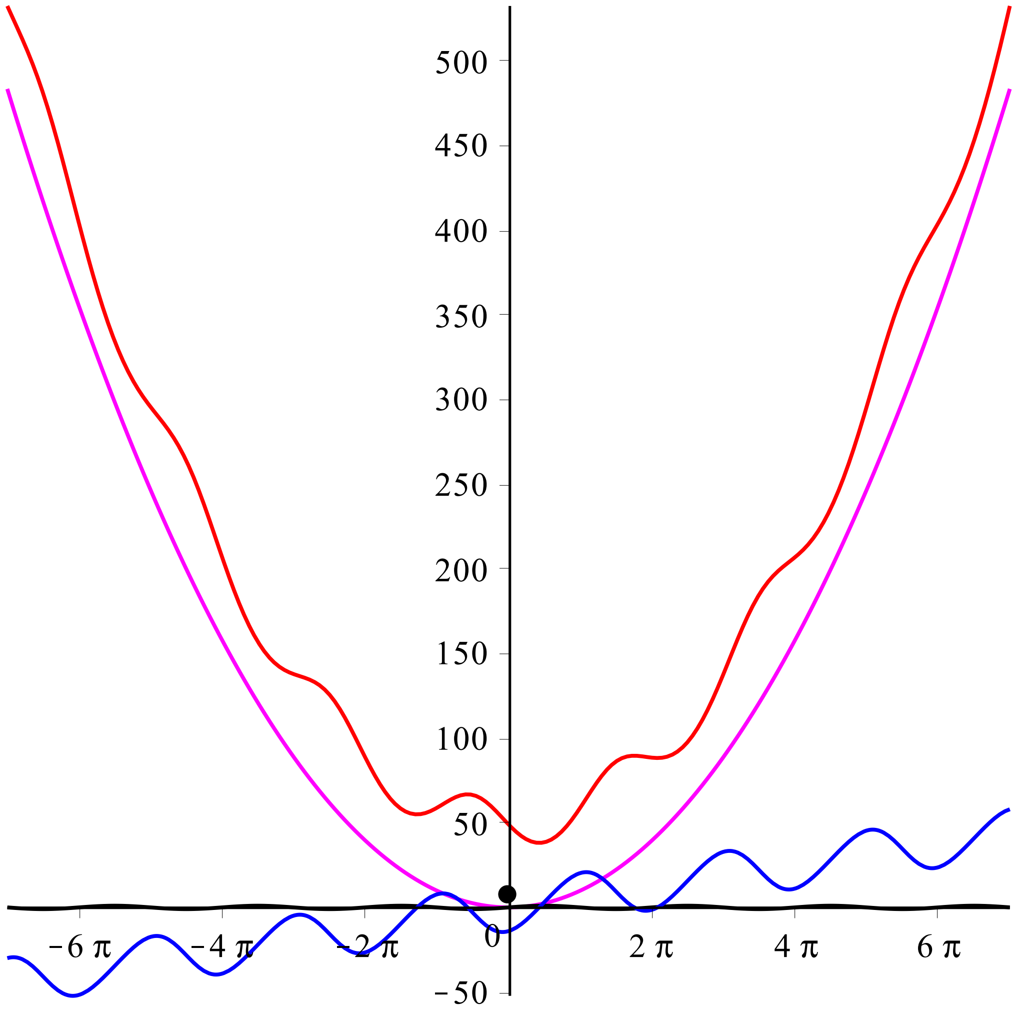

Abb.4: Ableitung

Die Abbildung 5 zeigt den relevanten Ausschnitt in der Skalierung 1:1.

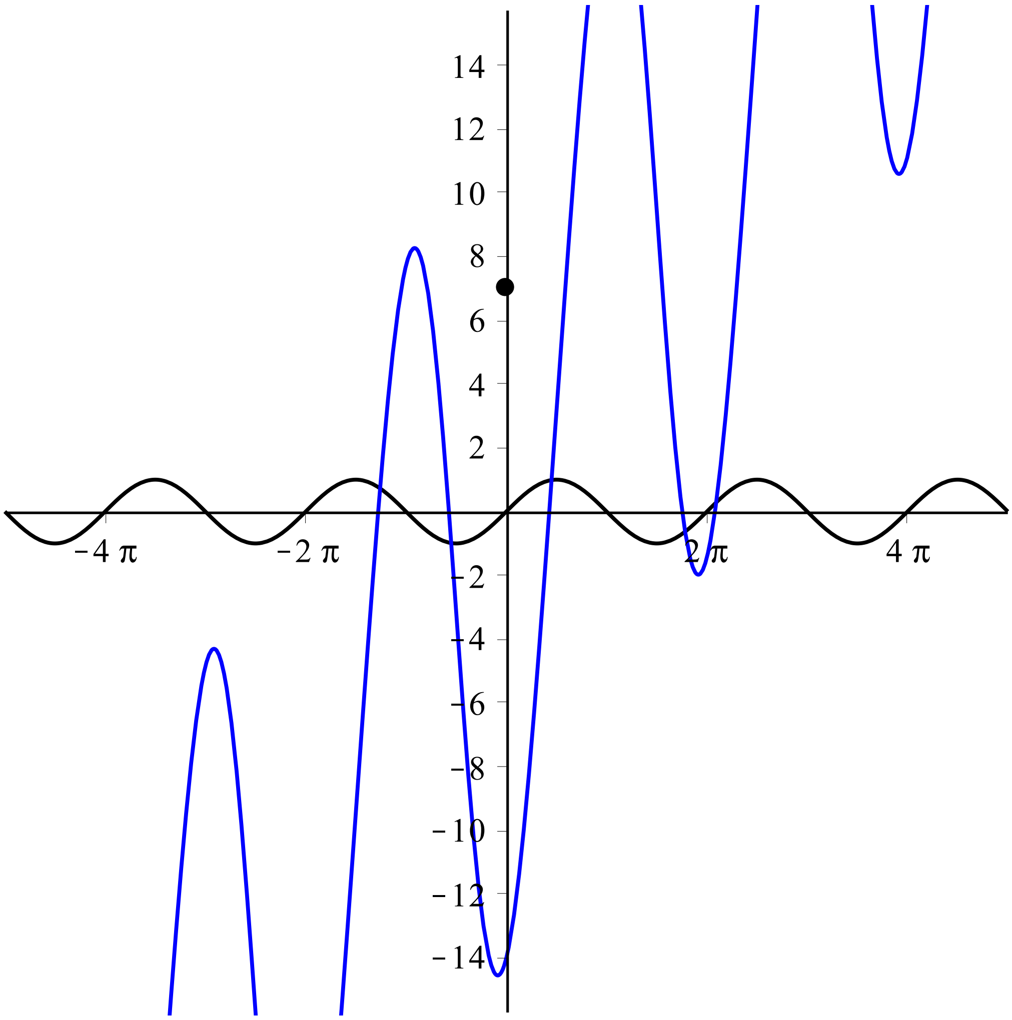

Abb. 5: Ausschnitt

Jetzt müssen wir einfach noch die Nullstellen der Ableitung bestimmen. Das Problem ist, dass sich die Gleichung (3) formal nicht nach t auflösen lässt. Es ist ein klassisches Beispiel für eine numerische Behandlung. Numerische Behandlungen haben aber den Nachteil, dass einzelne Lösungen untergehen können.

Ich habe mit dem Bisektionsverfahren zur Bestimmung der fünf Lösungen (Abb. 1) gearbeitet. Dabei habe ich die Startwerte in der Nähe der gemäß Abbildung 5 vermuteten Nullstellen gewählt.