Hans Walser, [20141116]

Linearität

1 Worum geht es?

Es werden Visualisierungen zum Thema *Linearität* gesucht.

2 Gleiche Breiten

Wir arbeiten mit Histogrammen konstanter Breite 1.

2.1 Treppendarstellung

Die Abbildung 1 zeigt die klassische Treppendarstellung auf der Basis eines Karorasters.

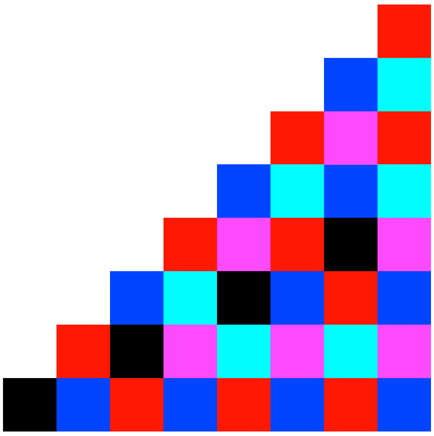

Abb. 1: Treppendarstellung

Die Staffelhöhen wachsen linear.

Natürlich hätte die Farbgebung einfacher gemacht werden können, etwa mit einer Schachbrettfärbung.

2.2 Schrägen

Das Funktionsdiagramm einer linearen Funktion ist eine Ursprungsgerade, in unserem Beispiel mit der Steigung 1.

Wir können die Treppe zu einer Figur mit Schräglinien umbauen (Abb. 2). Der Ursprung ist eine halbe Einheit links vom ersten schwarzen Trapez.

Die Trapeze, auch wenn es nicht so scheint, haben alle denselben Flächeninhalt 1. Jede Staffel hat die Breite 1.

Eine schachbrettartige Färbung ist nicht mehr möglich.

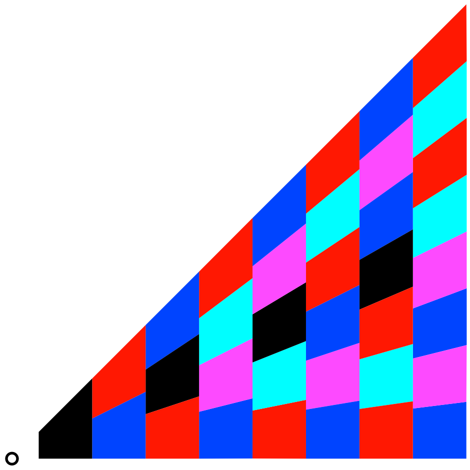

Abb. 2: Abgeschrägte Figur

2.3 Kreisdarstellung

Die Abbildung 3 zeigt eine Kreisdarstellung. Alle Ringsektoren haben denselben Flächeninhalt. Allerdings gehört das Loch in der Mitte nicht zur Figur.

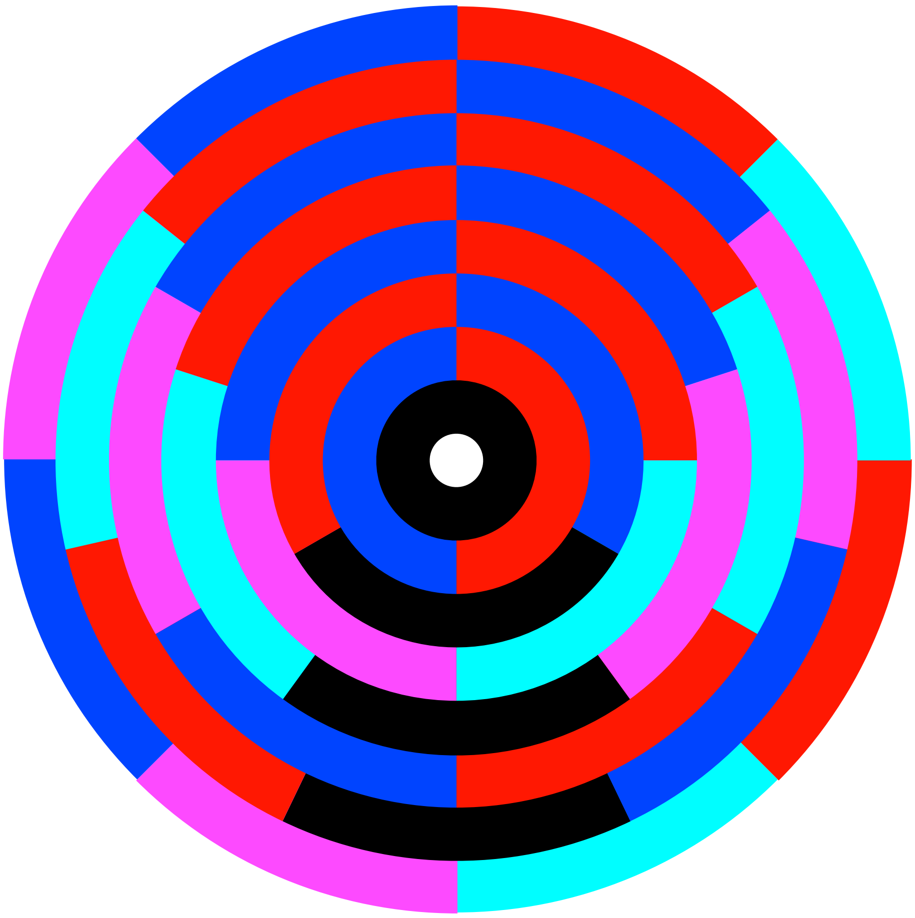

Abb. 3: Kreisdarstellung

Die Kreise haben der Reihe nach die Radien $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$. Die Kreisringe haben daher die Breite 1.

3 Abnehmende Breiten

In der Abbildung 2 ist der Versatz des Ursprunges vielleicht störend, in der Abbildung 3 das weiße Loch in der Mitte. Beides kann behoben werden, wenn wir auf gleiche Breiten verzichten.

3.1 Abgeschrägtes Staffelbild

Die Abbildung 4 zeigt ein abgeschrägtes Staffelbild.

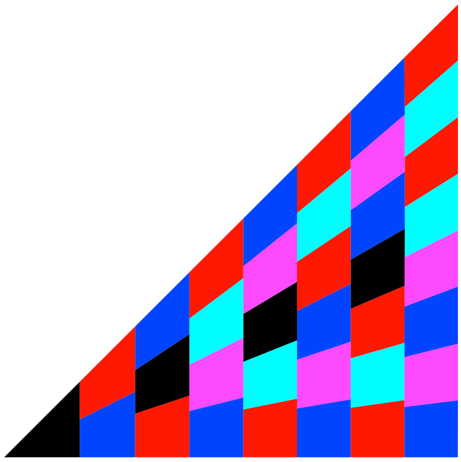

Abb. 4: Abnehmende Breiten

Das Dreieck links unten und die Trapeze haben alle denselben Flächeninhalt.

Die Tabelle 1 gibt die Breiten der ersten Staffeln.

n	Breite	Numerisch
1	1	1
2	$\sqrt{3}-1$	0.7320508075689
3	$\sqrt{6}-\sqrt{3}$	0.7174389352143
4	$\sqrt{10}-\sqrt{6}$	0.7127879173852
5	$\sqrt{15}-\sqrt{10}$	0.7107056860390
6	$\sqrt{21}-\sqrt{15}$	0.7095923487484
7	$\sqrt{28}-\sqrt{21}$	0.7089269271733
8	$\sqrt{36}-\sqrt{28}$	0.7084973778708

Tab. 1: Staffelbreiten

Die n-te Staffel hat die Breite:

$$b_n = \sqrt{\binom{n+1}{2}} - \sqrt{\binom{n}{2}}$$

Die Breiten nehmen ab, das ist von Auge aber kaum wahrnehmbar.

Die Frage ist, ob es einen Grenzwert für die Staffelbreiten gibt. Ich vermute:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Beweis:

Zunächst ist:

$$b_n = \sqrt{\binom{n+1}{2}} - \sqrt{\binom{n}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}\right)$$

Wir führen nun folgende Termumformung durch:

$$\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 2\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$$

Somit ist:

$$b_n = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

Der vermutete Grenzwert ist offensichtlich.

Ende des Beweises.

3.2 Kreisdarstellung

Die Abbildung 5 zeigt die entsprechende Kreisdarstellung.

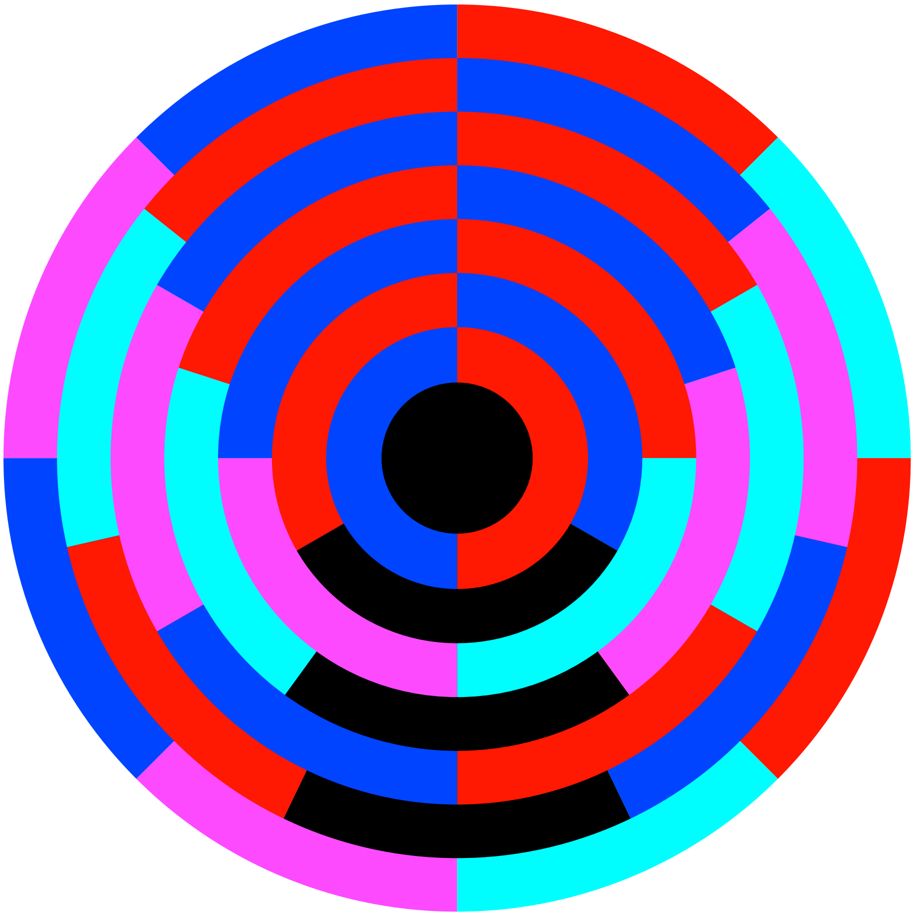

Abb. 5: Kreisdarstellung

Wir haben jetzt kein schwarzes Loch mehr. Die Kreise haben die Radien:

$$1, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{21}, \sqrt{28}, \sqrt{36}.$$

Der n-te Kreis hat den Radius:

$$r_n = \sqrt{\binom{n+1}{2}}$$

Die Kreisbreiten entsprechen den Staffelbreiten der Abbildung 4.