Hans Walser, [20170929]

Lemniskate

1 Worum geht es?

Es wird eine Verallgemeinerung der Lemniskate von Bernoulli gezeigt.

2 Die Lemniskate von Bernoulli

Zu den beiden Punkten $E_0(1,0)$ und $E_1(-1,1)$ zeichnen wir die Punkte $P(x,y)$ für welche das Produkt der Abstände zu E_0 und E_1 konstant 1 ist. Es gilt also die implizite Gleichung:

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}\sqrt{(x+1)^2+y^2}=1 \qquad (1)$$

Die entstehende Kurve (Abb. 1) ist die Lemniskate von Bernoulli (Jakob Bernoulli, 1654[jul.]/1655[greg]-1705). Siehe Haftendorn (2017), S. 108f.

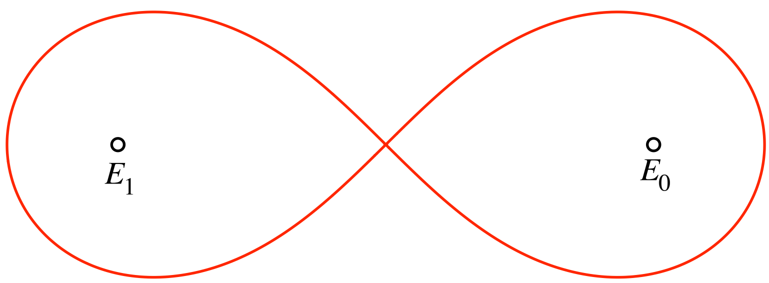

Abb. 1: Lemniskate von Bernoulli

3 Polardarstellung

Die Lemniskate hat in Polarkoordinaten die Darstellung:

$$r=\sqrt{2\cos(2\phi)}, \quad \phi\in[0,2\pi] \qquad (2)$$

Beweis:

Die Gleichung (1) schreiben wir in der Form:

$$\left((x-1)^2+y^2\right)\left((x+1)^2+y^2\right)=1 \qquad (3)$$

Dies kann umgeformt werden zu:

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2\left(x^2-y^2\right) \tag{4}$$

Die Gleichung (2) schreiben wir in der Form:

$$r^2=2\cos(2\phi)=2\left(\cos^2(\phi)-\sin^2(\phi)\right) \tag{5}$$

Es ist:

$$r^2=x^2+y^2, \quad \cos^2(\phi)=\tfrac{x^2}{x^2+y^2}, \quad \sin^2(\phi)=\tfrac{y^2}{x^2+y^2} \tag{6}$$

Einsetzen in (5) liefert:

$$x^2+y^2=2\left(\tfrac{x^2}{x^2+y^2}-\tfrac{y^2}{x^2+y^2}\right) \tag{7}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Gleichung (4).
Die Polardarstellung (2) hat eine Tücke: sie ist nicht für den ganzen Definitionsbereich $\phi\in[0,2\pi]$ reell definiert, sondern nur für $\phi\in\left[0,\tfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\tfrac{3\pi}{4},\tfrac{5\pi}{4}\right]\cup\left[\tfrac{7\pi}{4},2\pi\right]$. Dazwischen ergeben sich imaginäre Werte.
Wir können das Problem umgehen mit:

$$r=\sqrt{2\left|\cos(2\phi)\right|}, \quad \phi\in[0,2\pi] \tag{8}$$

Die Abbildung 2 zeigt die zugehörige Kurve.

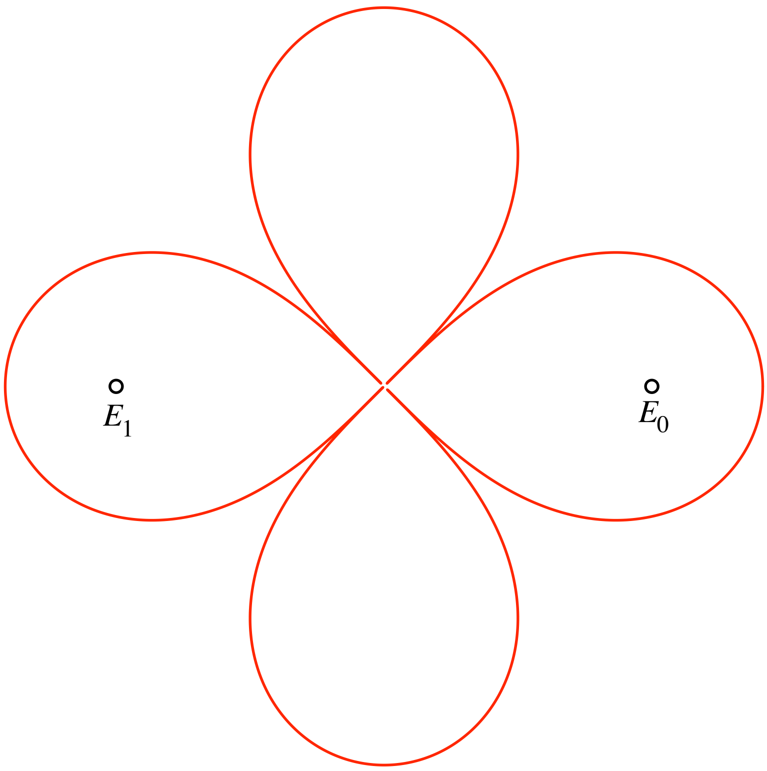

Abb. 2: Absolutes Kleeblatt

4 Verallgemeinerung

In den Polardarstellungen (2) beziehungsweise (8) kommen je zweimal der Faktor 2 vor. Wir ersetzen diesen Faktor durch den positiven rationalen Faktor $\frac{p}{q}$ und den Definitionsbereich durch $\phi \in [0, 2\pi q]$. Wir arbeiten also mit den Polardarstellungen:

$$r = \sqrt{\tfrac{p}{q}\cos\left(\tfrac{p}{q}\phi\right)}, \quad \phi \in [0, 2\pi q] \tag{9}$$

und:

$$r = \sqrt{\tfrac{p}{q}\left|\cos\left(\tfrac{p}{q}\phi\right)\right|}, \quad \phi \in [0, 2\pi q] \tag{10}$$

Im Folgenden einige Beispiele. Es sind jeweils die Versionen ohne Betragsstriche beziehungsweise mit Betragsstrichen angegeben.

Die Kurven sind – mit Ausnahme der Lemniskate von Bernoulli – nicht identisch mit den Verallgemeinerungen unter [2].

4.1 *p/q* = 3

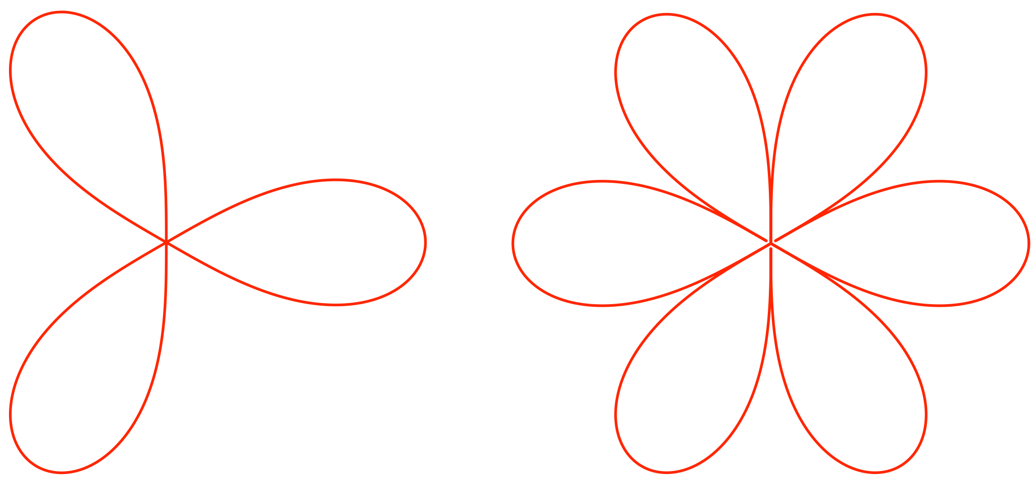

Abb. 3: *p/q* = 3

4.2 *p/q* = 4

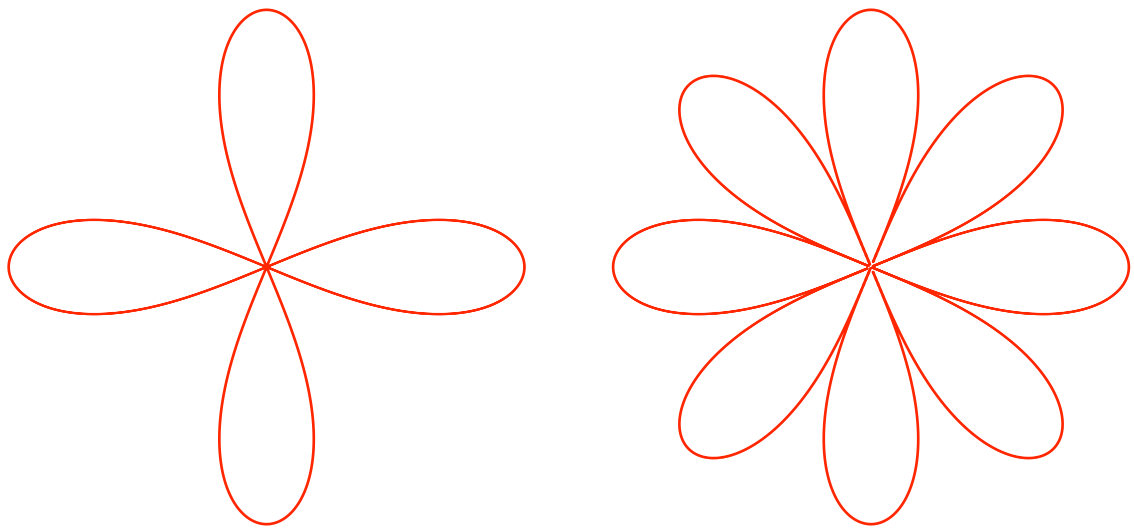

Abb. 4: *p/q* = 4

4.3 *p/q* = 4/5

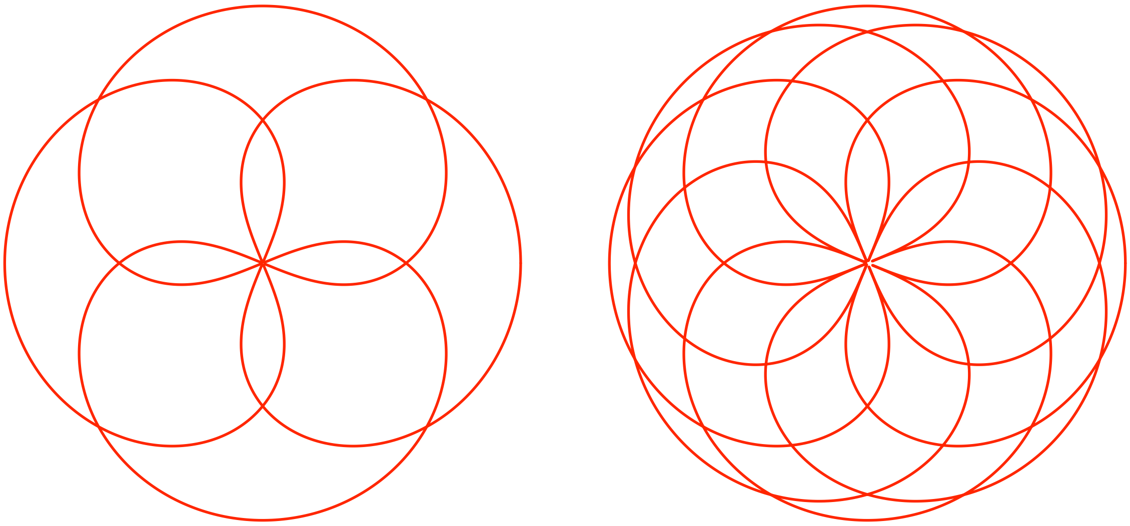

Abb. 5: *p/q* = 4/5

4.4 *p/q* = 5/4

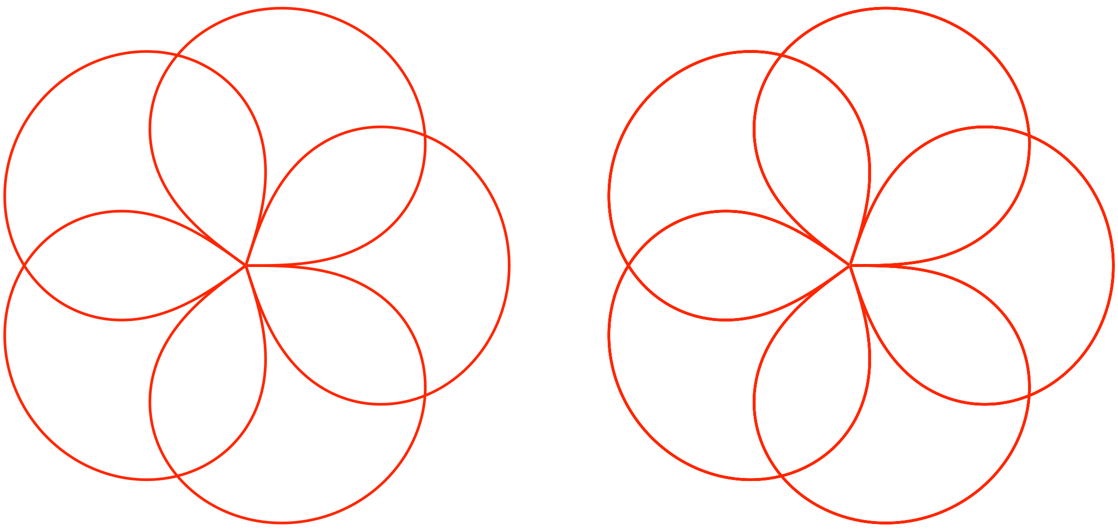

Abb. 6: *p/q* = 5/4

Die beiden Figuren unterscheiden sich nicht.

4.5 *p/q* = 1/2

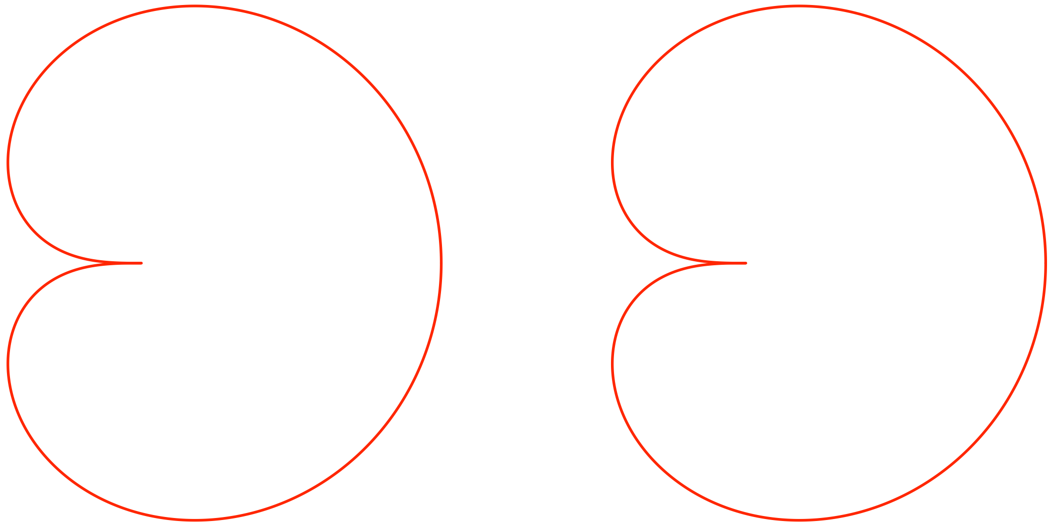

Abb. 7: *p/q* = 1/2

Die beiden Figuren unterscheiden sich nicht.
Es handelt sich nicht um die Kardioide.

Literatur

Haftendorn, Dörte (2017): Kurven erkunden und verstehen. Mit GeoGebra und anderen Werkzeugen. Wiesbaden: Springer Spektrum. ISBN 978-3-658-14748-8.

Websites

[1] Hans Walser: Lemniskate (abgerufen 29.09.2017):
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Lemniskate/Lemniskate.htm

[2] Hans Walser: Lemniskate (abgerufen 29.09.2017):
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Lemniskate2/Lemniskate2.htm