

Hans Walser, [20170929]

Lemniskate

1 Worum geht es?

Es wird eine Verallgemeinerung der Lemniskate von Bernoulli gezeigt.

2 Die Lemniskate von Bernoulli

Zu den beiden Punkten $E_0(1,0)$ und $E_1(-1,1)$ zeichnen wir die Punkte $P(x,y)$ für welche das Produkt der Abstände zu E_0 und E_1 konstant 1 ist. Es gilt also die implizite Gleichung:

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 1 \quad (1)$$

Die entstehende Kurve (Abb. 1) ist die Lemniskate von Bernoulli (Jakob Bernoulli, 1654^{jul.}/1655^{greg.}-1705). Siehe Haftdorn (2017), S. 108f.

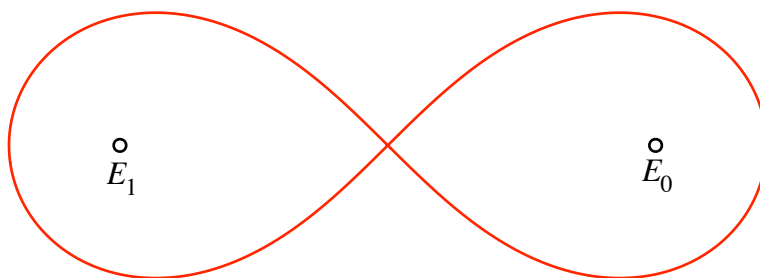


Abb. 1: Lemniskate von Bernoulli

3 Polardarstellung

Die Lemniskate hat in Polarkoordinaten die Darstellung:

$$r = \sqrt{2 \cos(2\phi)}, \quad \phi \in [0, 2\pi] \quad (2)$$

Beweis:

Die Gleichung (1) schreiben wir in der Form:

$$\left((x-1)^2 + y^2 \right) \left((x+1)^2 + y^2 \right) = 1 \quad (3)$$

Dies kann umgeformt werden zu:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2) \quad (4)$$

Die Gleichung (2) schreiben wir in der Form:

$$r^2 = 2 \cos(2\phi) = 2(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)) \quad (5)$$

Es ist:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \cos^2(\phi) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad \sin^2(\phi) = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \quad (6)$$

Einsetzen in (5) liefert:

$$x^2 + y^2 = 2 \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (7)$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Gleichung (4).

Die Polardarstellung (2) hat eine Tücke: sie ist nicht für den ganzen Definitionsbereich $\phi \in [0, 2\pi]$ reell definiert, sondern nur für $\phi \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$. Dazwischen ergeben sich imaginäre Werte.

Wir können das Problem umgehen mit:

$$r = \sqrt{2|\cos(2\phi)|}, \quad \phi \in [0, 2\pi] \quad (8)$$

Die Abbildung 2 zeigt die zugehörige Kurve.

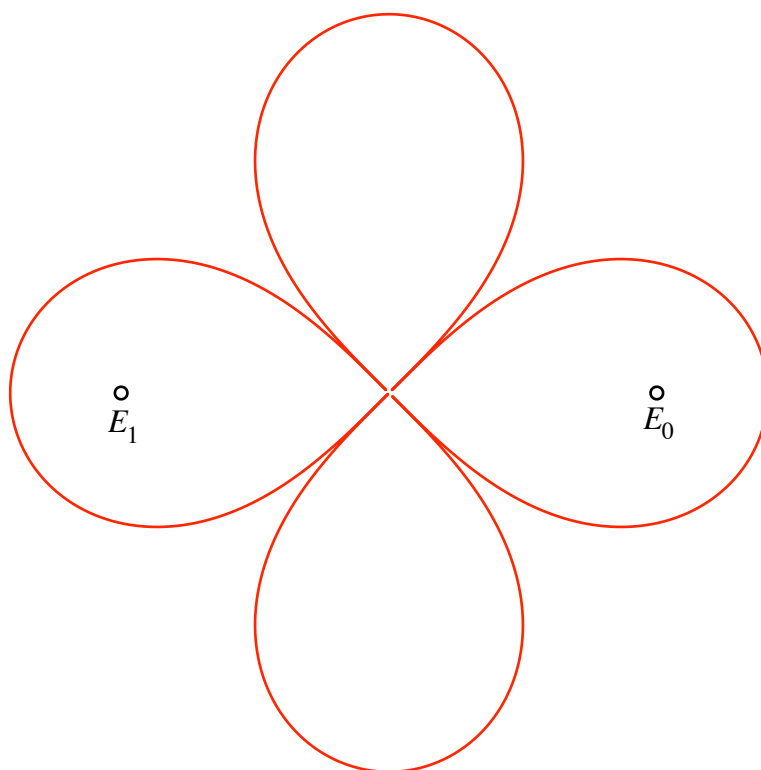


Abb. 2: Absolutes Kleeblatt

4 Verallgemeinerung

In den Polardarstellungen (2) beziehungsweise (8) kommen je zweimal der Faktor 2 vor. Wir ersetzen diesen Faktor durch den positiven rationalen Faktor $\frac{p}{q}$ und den Definitionsbereich durch $\phi \in [0, 2\pi q]$. Wir arbeiten also mit den Polardarstellungen:

$$r = \sqrt{\frac{p}{q} \cos\left(\frac{p}{q}\phi\right)}, \quad \phi \in [0, 2\pi q] \quad (9)$$

und:

$$r = \sqrt{\frac{p}{q} \left| \cos\left(\frac{p}{q}\phi\right) \right|}, \quad \phi \in [0, 2\pi q] \quad (10)$$

Im Folgenden einige Beispiele. Es sind jeweils die Versionen ohne Betragsstriche beziehungsweise mit Betragsstrichen angegeben.

Die Kurven sind – mit Ausnahme der Lemniskate von Bernoulli – nicht identisch mit den Verallgemeinerungen unter [\[2\]](#).

4.1 $p/q = 3$

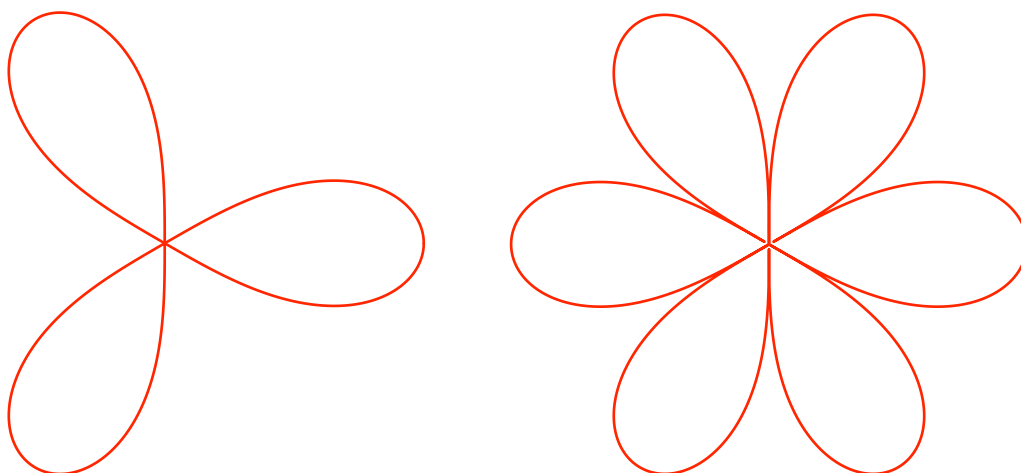


Abb. 3: $p/q = 3$

4.2 $p/q = 4$

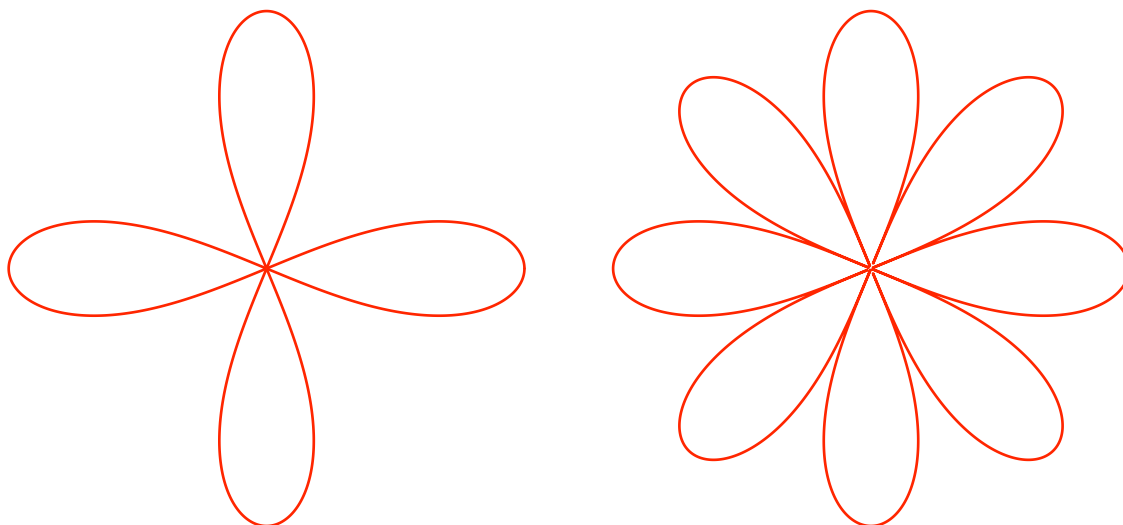


Abb. 4: $p/q = 4$

4.3 $p/q = 4/5$

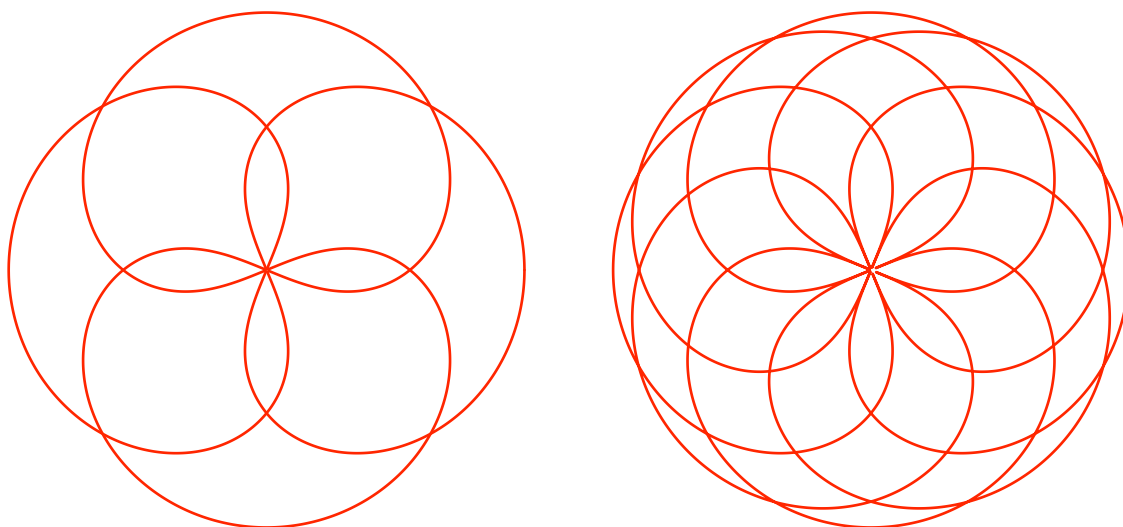


Abb. 5: $p/q = 4/5$

4.4 $p/q = 5/4$

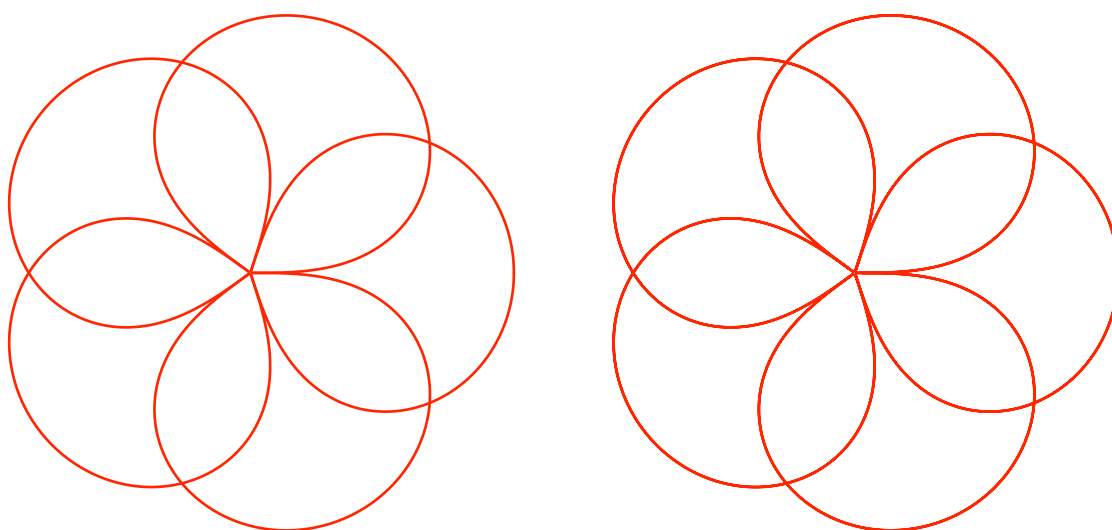


Abb. 6: $p/q = 5/4$

Die beiden Figuren unterscheiden sich nicht.

4.5 $p/q = 1/2$

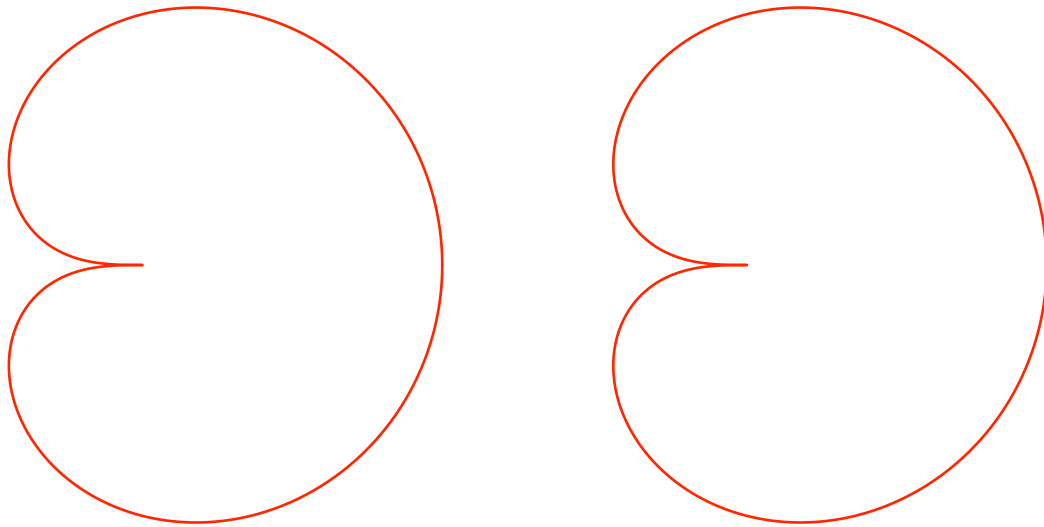


Abb. 7: $p/q = 1/2$

Die beiden Figuren unterscheiden sich nicht.
Es handelt sich nicht um die Kardioide.

Literatur

Haftendorn, Dörte (2017): *Kurven erkunden und verstehen. Mit GeoGebra und anderen Werkzeugen.* Wiesbaden: Springer Spektrum. ISBN 978-3-658-14748-8.

Websites

[1] Hans Walser: Lemniskate (abgerufen 29.09.2017):
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Lemniskate/Lemniskate.htm

[2] Hans Walser: Lemniskate (abgerufen 29.09.2017):
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Lemniskate2/Lemniskate2.htm