

Hans Walser, [20170910]

Lemniskate

Anregung: Haftendorn (2017)

1 Worum geht es?

Verallgemeinerung der Bernoulli-Lemniskate auf mehrere Pole.

2 Bernoulli-Lemniskate

Wir wählen zwei Pole $E_0(-1,0)$ und $E_1(-1,0)$.

In der Standard-Darstellung besteht nun die Bernoulli-Lemniskate aus den Punkten $P(x,y)$ mit der Eigenschaft:

$$\prod_{k=0}^1 d(P, E_k) = 1 \quad (1)$$

Die Abbildung 1 zeigt die Bernoulli-Lemniskate.

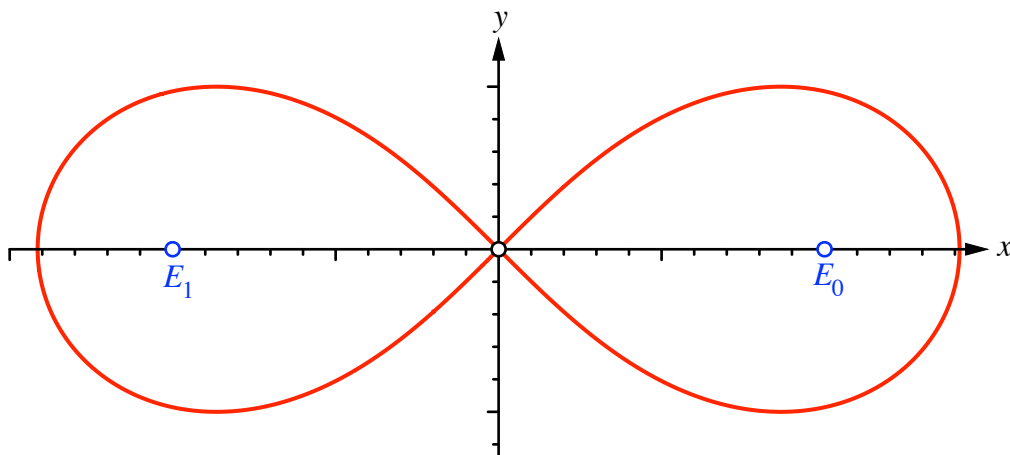


Abb. 1: Bernoulli-Lemniskate

Im Doppelpunkt (Koordinatenursprung) schneidet sich die Lemniskate orthogonal.

3 Mehrere Pole auf dem Einheitskreis

3.1 Regelmäßige Verteilung

Wir wählen n regelmäßig auf dem Einheitskreis verteilte Pole $E_k, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Die Pole sind also die Ecken des regelmäßigen n -Ecks mit Umkreisradius 1.

Die verallgemeinerte Bernoulli-Lemniskate besteht aus den Punkten $P(x, y)$ mit der Eigenschaft:

$$\prod_{k=0}^{n-1} d(P, E_k) = 1 \quad (2)$$

Für $n = 1$ ergibt sich der Kreis mit dem Mittelpunkt E_0 und dem Radius 1.

Die Abbildung 2 zeigt die verallgemeinerte Bernoulli-Lemniskate für $n = 3$. Im Dreifachpunkt haben wir Schnittwinkel mit Vielfachen von 60° . Beweis: Aus Symmetriegründen ist die Lemniskate orthogonal zu den Symmetrieachsen des durch die drei Pole gebildeten gleichseitigen Dreiecks.

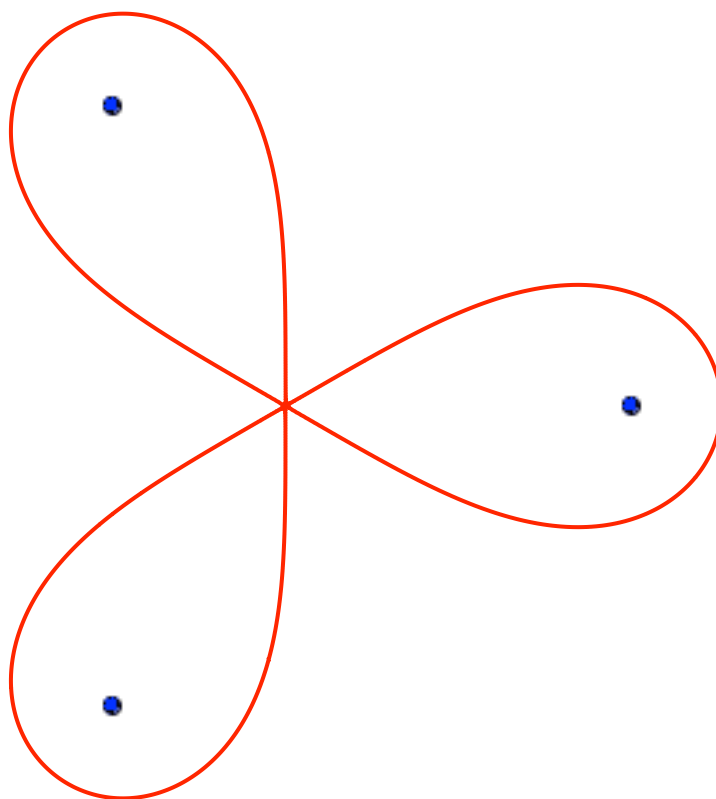


Abb. 3: Bernoulli-Lemniskate mit drei Polen

Die folgenden Abbildungen zeigen weitere verallgemeinerte Bernoulli-Lemniskaten.

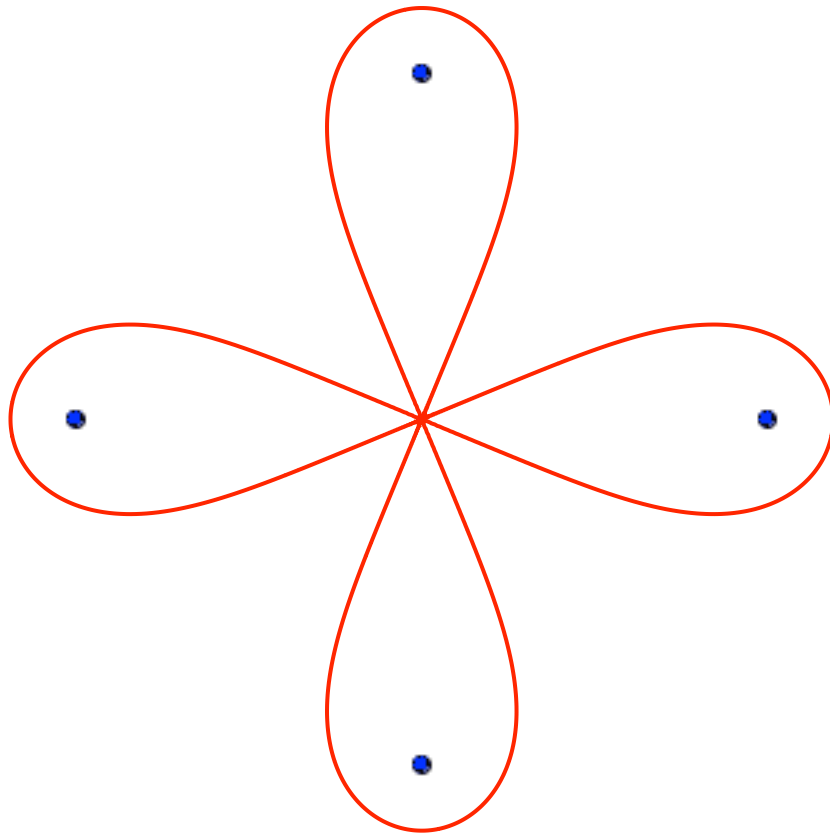


Abb. 3: Schlankes Kleeblatt

Die Abbildung 4 zeigt eine Überlagerung zweier Kleeblätter.

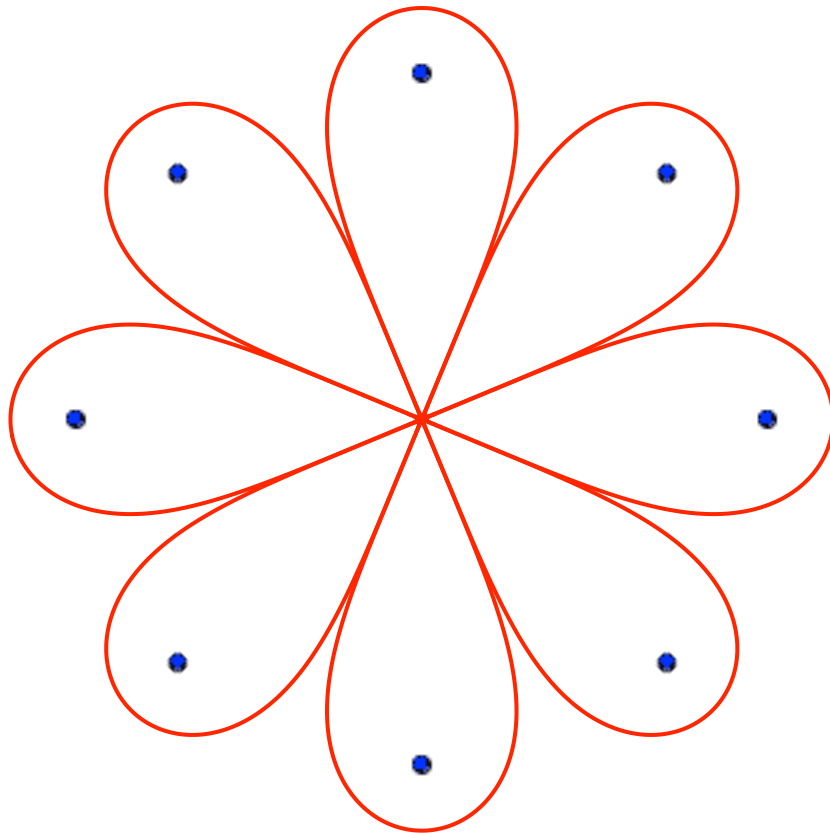


Abb. 4: Überlagerung

Und schließlich noch siebenteilig (Abb. 5).

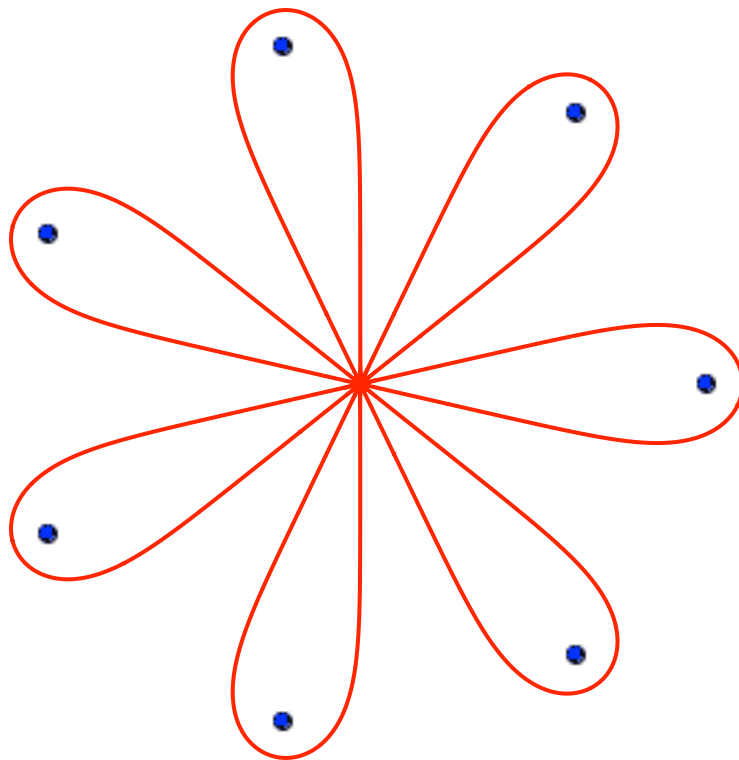


Abb. 5: Siebenteilig

3.2 Unregelmäßig verteilt

Wir wählen drei unregelmäßig verteilte Pole (Abb. 6). Die Kurve geht zwar noch durch den Ursprung (Mittelpunkt des Einheitskreises), hat aber dort keinen Mehrfachpunkt.

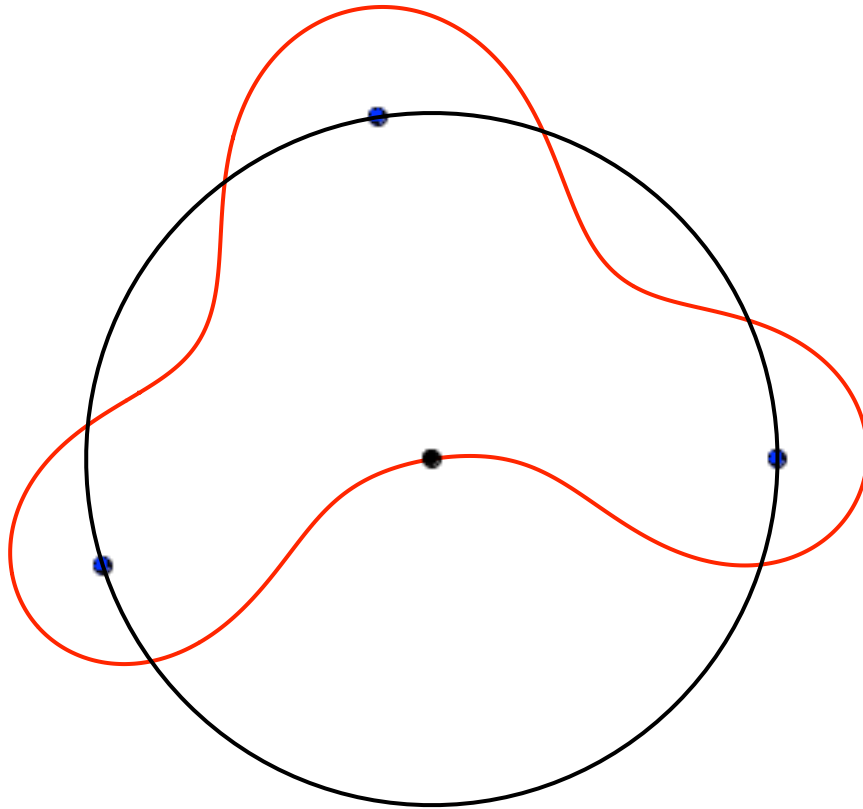


Abb. 6: Unregelmäßige Verteilung der Pole

Literatur

Haftendorn, Dörte (2017): Kurven erkunden und verstehen. Mit GeoGebra und anderen Werkzeugen. Wiesbaden: Springer Spektrum. ISBN 978-3-658-14748-8.