

Hans Walser, [20170910]

## Lemniskate

Anregung: Haftendorn (2017)

### 1 Worum geht es?

Verallgemeinerung der Bernoulli-Lemniskate auf mehrere Pole.

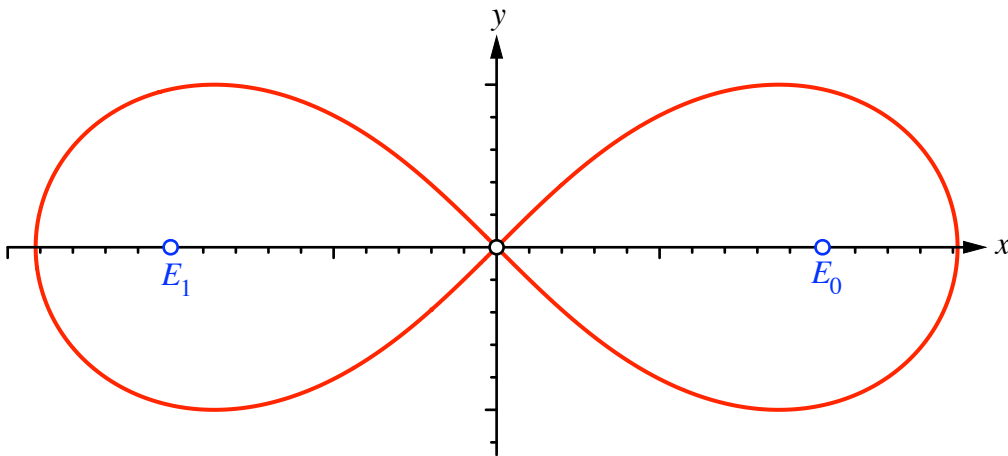
### 2 Bernoulli-Lemniskate

Wir wählen zwei Pole  $E_0(-1,0)$  und  $E_1(-1,0)$ .

In der Standard-Darstellung besteht nun die Bernoulli-Lemniskate aus den Punkten  $P(x,y)$  mit der Eigenschaft:

$$\prod_{k=0}^1 d(P, E_k) = 1 \quad (1)$$

Die Abbildung 1 zeigt die Bernoulli-Lemniskate.



**Abb. 1: Bernoulli-Lemniskate**

Im Doppelpunkt (Koordinatenursprung) schneidet sich die Lemniskate orthogonal.

### 3 Mehrere Pole auf dem Einheitskreis

#### 3.1 Regelmäßige Verteilung

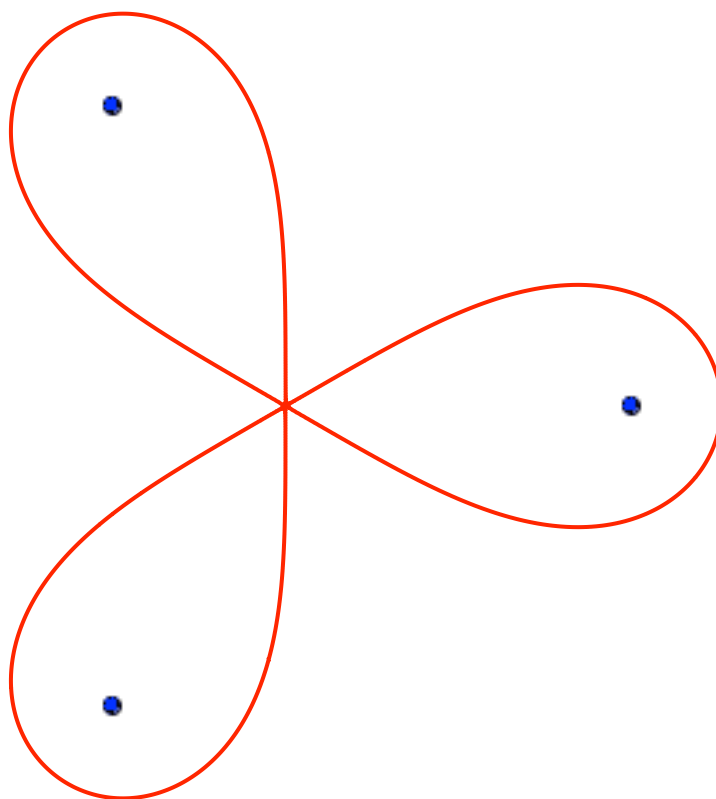
Wir wählen  $n$  regelmäßig auf dem Einheitskreis verteilte Pole  $E_k, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Die Pole sind also die Ecken des regelmäßigen  $n$ -Ecks mit Umkreisradius 1.

Die verallgemeinerte Bernoulli-Lemniskate besteht aus den Punkten  $P(x, y)$  mit der Eigenschaft:

$$\prod_{k=0}^{n-1} d(P, E_k) = 1 \quad (2)$$

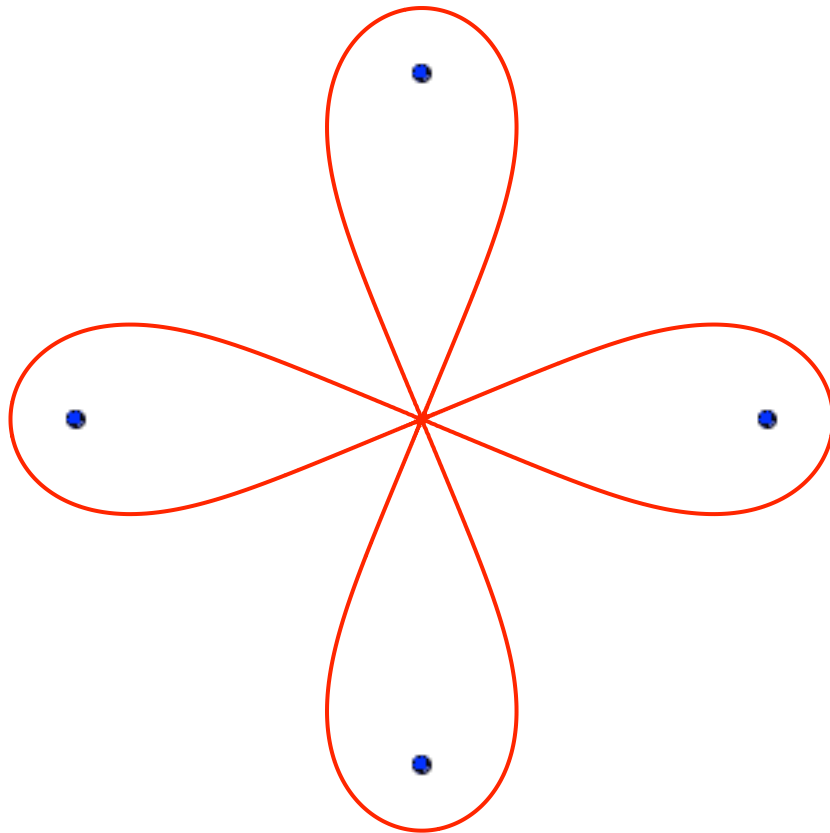
Für  $n = 1$  ergibt sich der Kreis mit dem Mittelpunkt  $E_0$  und dem Radius 1.

Die Abbildung 2 zeigt die verallgemeinerte Bernoulli-Lemniskate für  $n = 3$ . Im Dreifachpunkt haben wir Schnittwinkel mit Vielfachen von  $60^\circ$ . Beweis: Aus Symmetriegründen ist die Lemniskate orthogonal zu den Symmetrieachsen des durch die drei Pole gebildeten gleichseitigen Dreiecks.



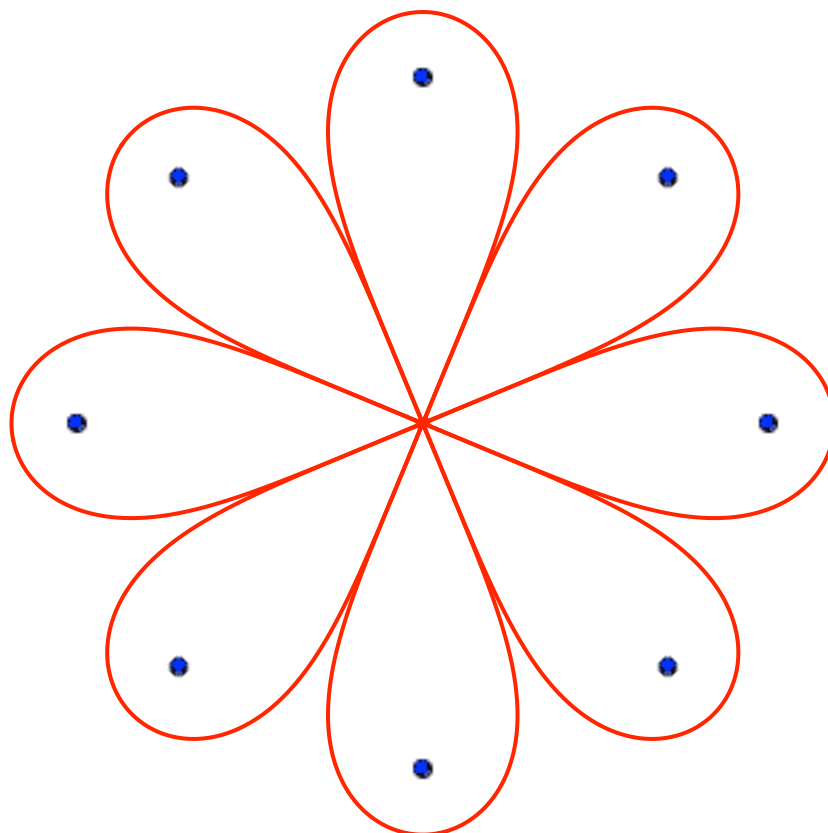
**Abb. 3: Bernoulli-Lemniskate mit drei Polen**

Die folgenden Abbildungen zeigen weitere verallgemeinerte Bernoulli-Lemniskaten.



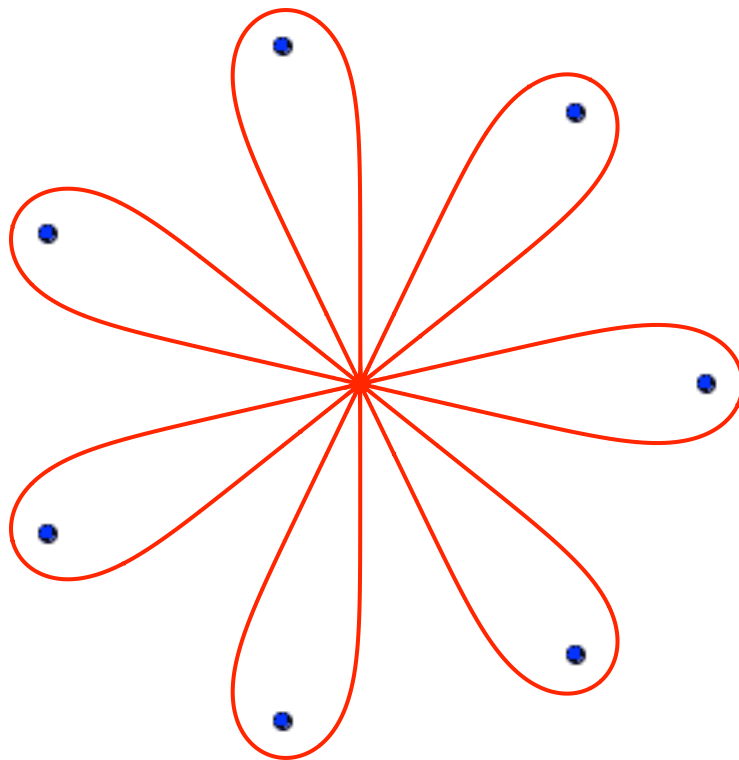
**Abb. 3: Schlankes Kleeblatt**

Die Abbildung 4 zeigt eine Überlagerung zweier Kleeblätter.



**Abb. 4: Überlagerung**

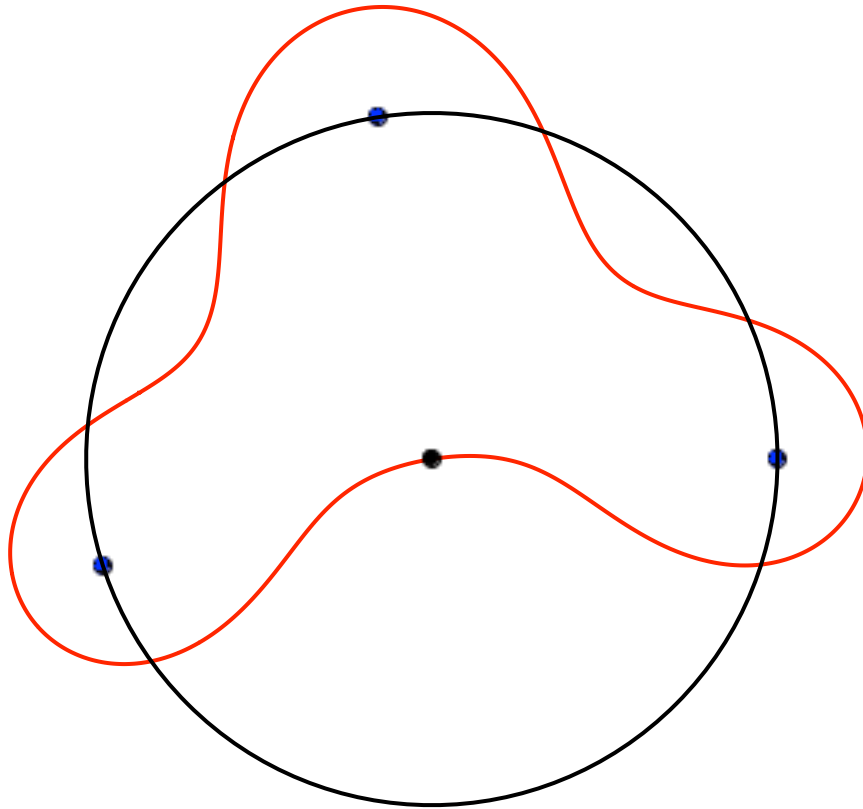
Und schließlich noch siebenteilig (Abb. 5).



**Abb. 5: Siebenteilig**

### 3.2 Unregelmäßig verteilt

Wir wählen drei unregelmäßig verteilte Pole (Abb. 6). Die Kurve geht zwar noch durch den Ursprung (Mittelpunkt des Einheitskreises), hat aber dort keinen Mehrfachpunkt.



**Abb. 6: Unregelmäßige Verteilung der Pole**

### Literatur

Haftendorn, Dörte (2017): Kurven erkunden und verstehen. Mit GeoGebra und anderen Werkzeugen. Wiesbaden: Springer Spektrum. ISBN 978-3-658-14748-8.