Hans Walser, [20170811]

Lämpel-Würfel

Indirekte Anregung: H. Sch., W.

1 Definition

In einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem ist ein Lämpel-Würfel ein Würfel mit ganzzahligen Eckpunktkoordinaten und ganzzahligen Kantenlängen (L. Lämpel, 1865).

2 Beispiele

2.1 Beispiel 1

Die Abbildung 1 zeigt den durch die drei Vektoren

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

aufgespannten Würfel. Die drei Vektoren sind paarweise orthogonal und haben je die Länge 3. Wir erhalten also einen Lämpel-Würfel.

Der zweite und der dritte Vektor entstehen aus dem ersten durch zyklische Vertauschung.

Die Zahlen 2, 2, 1, 3 bilden ein pythagoreisches Quadrupel.

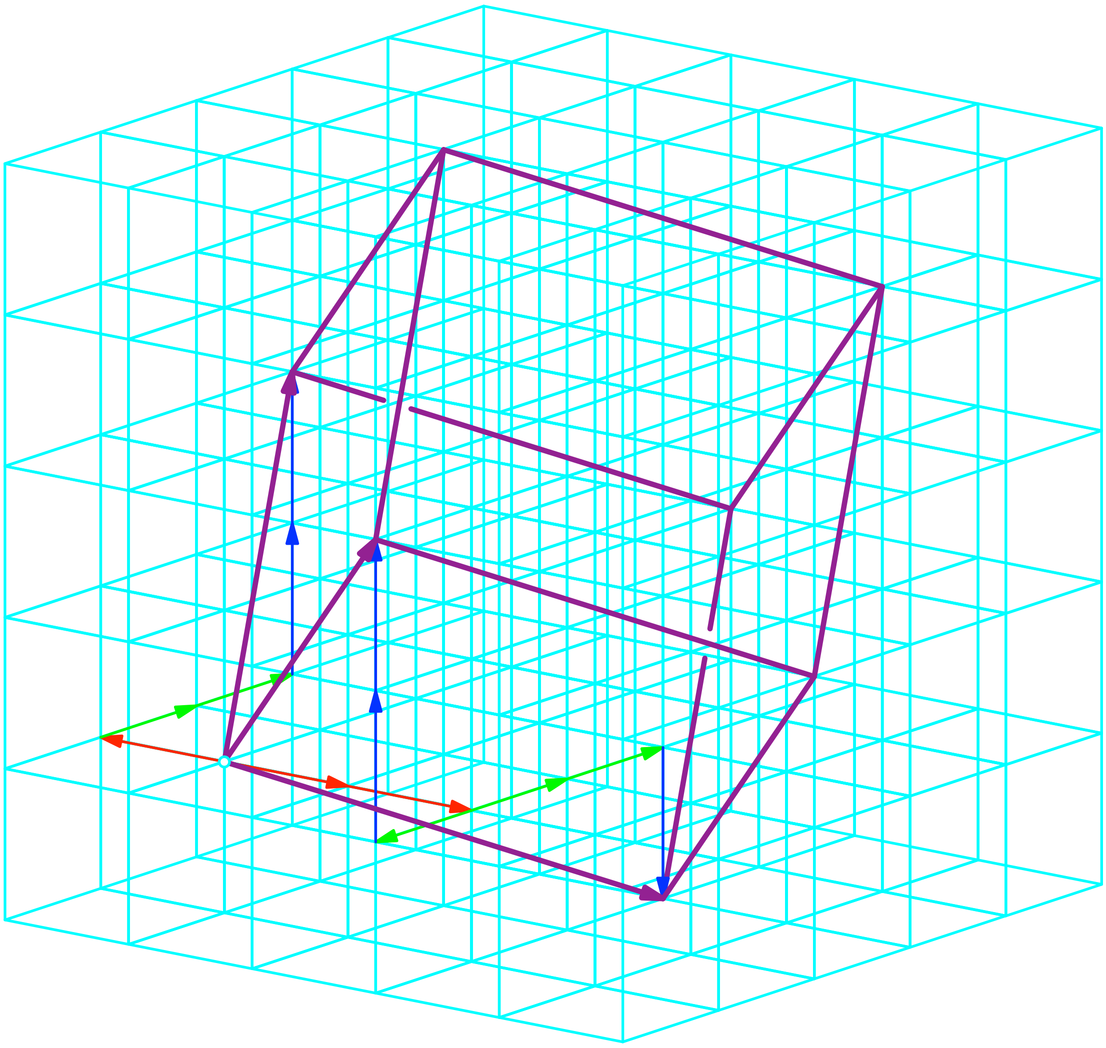

Abb. 1: Lämpel-Würfel

Die Abbildung 2 zeigt die drei Risse in klassischer Manier.
Die zyklische Vertauschung zeigt sich in der Kongruenz der drei Risse.

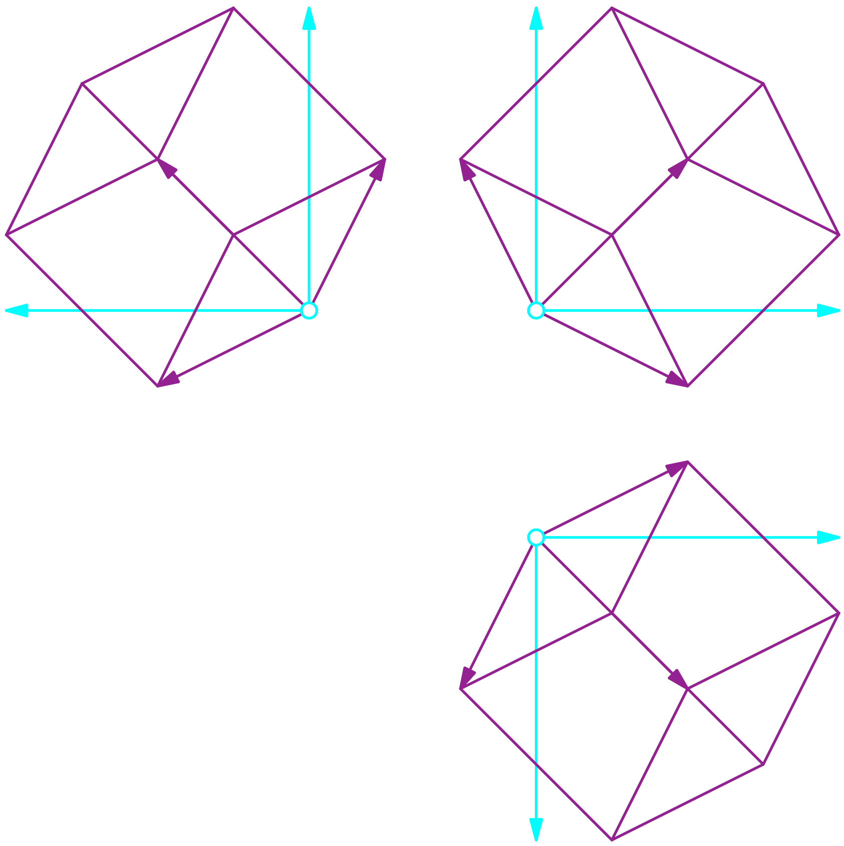

Abb. 2: Grund-, Auf- und Seitenriss

2.2 Beispiel 2

Die drei Vektoren

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

sind paarweise orthogonal und haben die Länge 7. Sie spannen also ebenfalls einen Lämpel-Würfel auf.

3 Allgemein

Die drei Vektoren

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ n^2+n \\ -n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -n \\ n+1 \\ n^2+n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n^2+n \\ -n \\ n+1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

sind paarweise orthogonal und haben die Länge n^2+n+1. Sie spannen daher einen Lämpel-Würfel auf.

Der Nachweis der Orthogonalität erfolgt mit dem Skalarprodukt, die Berechnung der Länge mit Pythagoras.

Beispiele:

Für $n = 0$ ergibt sich der Einheitswürfel des kartesischen Koordinatensystems.

Für $n = 1$ erhalten wir das Beispiel (1) (Abb. 1 und 2).

Für $n = 2$ erhalten wir das Beispiel (2).

Offene Frage: Erhalten wir mit $n \in \mathbb{N}$ und den Formeln (3) *alle* Lämpel-Würfel?

4 Pythagoreische Quadrupel

Die vier Zahlen

$$n+1, n^2+n, n, n^2+n+1 \tag{4}$$

bilden ein pythagoreisches Quadrupel. Es ist:

$$(n+1)^2 + \left(n^2+n\right)^2 + n^2 = \left(n^2+n+1\right)^2 \tag{5}$$

Frage: Erhalten wir mit $n \in \mathbb{N}$ und den Formeln (5) *alle* pythagoreischen Quadrupel?