

Hans Walser, [20150117]

***k*-nomialkurven**

1 Worum geht es?

Die Polynome, welche zu den Bi-, Tri, ... , *k*-nomialkoeffizienten führen, werden als Funktionsterme gedeutet und die zugehörigen Grafen geplottet.

Die *k*-nomialkoeffizienten ergeben sich als Koeffizienten von:

$$\left(x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1\right)^n = \left(\sum_{j=0}^{k-1} x^j\right)^n$$

Die *k*-nomialkurven sind die Funktionsgraphen von.

$$f_n : x \mapsto \left(\sum_{j=0}^{k-1} x^j\right)^n$$

2 Binomialkurven

Die Binomialkoeffizienten können als Koeffizienten von $(x+1)^n$ generiert werden:

$$(x+1)^0 = 1$$

$$(x+1)^1 = 1x+1$$

$$(x+1)^2 = 1x^2 + 2x+1$$

$$(x+1)^3 = 1x^3 + 3x^2 + 3x+1$$

$$(x+1)^4 = 1x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x+1$$

$$(x+1)^5 = 1x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x+1$$

$$(x+1)^6 = 1x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x+1$$

$$(x+1)^7 = 1x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x+1$$

$$(x+1)^8 = 1x^8 + 8x^7 + 28x^6 + 56x^5 + 70x^4 + 56x^3 + 28x^2 + 8x+1$$

$$(x+1)^9 = 1x^9 + 9x^8 + 36x^7 + 84x^6 + 126x^5 + 126x^4 + 84x^3 + 36x^2 + 9x+1$$

$$(x+1)^{10} = 1x^{10} + 10x^9 + 45x^8 + 120x^7 + 210x^6 + 252x^5 + 210x^4 + 120x^3 + 45x^2 + 10x+1$$

Die Abbildung 1 zeigt nun die Grafen der Funktionen $f_n(x) = (x+1)^n$ für $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Für gerade n sind die Kurven rot, für ungerade n blau gezeichnet.

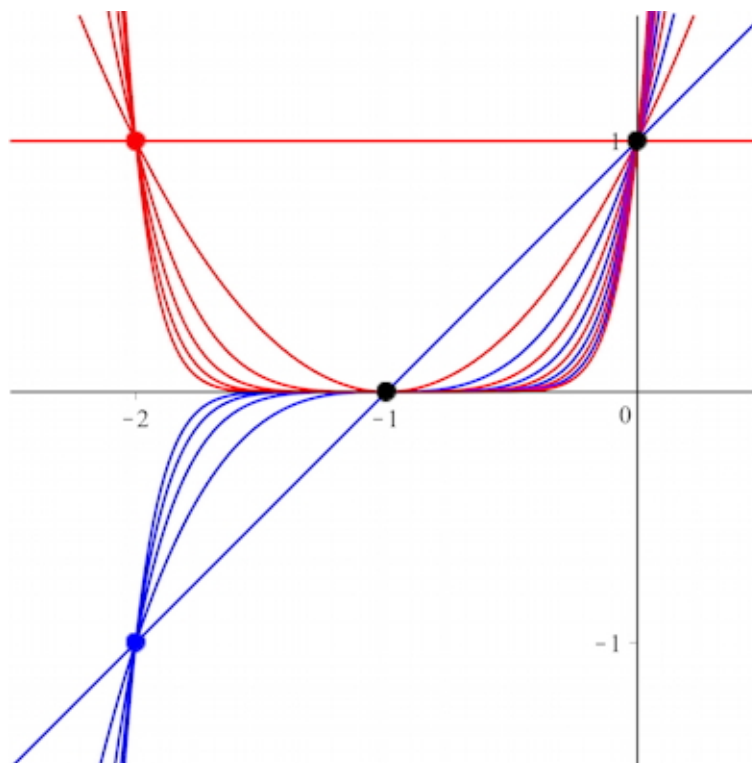


Abb. 1: Binomialkurven

3 Trinomialkurven

Die Binomialkoeffizienten können als Koeffizienten von $(x^2 + x + 1)^n$ generiert werden:

$$(x^2 + x + 1)^0 = 1$$

$$(x^2 + x + 1)^1 = 1x^2 + 1x + 1$$

$$(x^2 + x + 1)^2 = 1x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$(x^2 + x + 1)^3 = 1x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1$$

$$(x^2 + x + 1)^4 = 1x^8 + 4x^7 + 10x^6 + 16x^5 + 19x^4 + 16x^3 + 10x^2 + 4x + 1$$

$$(x^2 + x + 1)^5 = 1x^{10} + 5x^9 + 15x^8 + 30x^7 + 45x^6 + 51x^5 + 45x^4 + 30x^3 + 15x^2 + 5x + 1$$

Die Rekursion ist offensichtlich. Jede Zahl ist die Summe der drei nächstgelegenen Zahlen in der oberen Reihe.

Die Abbildung 2 zeigt nun die Grafen der Funktionen $f_n(x) = (x^2 + x + 1)^n$ für $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Für gerade n sind die Kurven rot, für ungerade n blau gezeichnet.

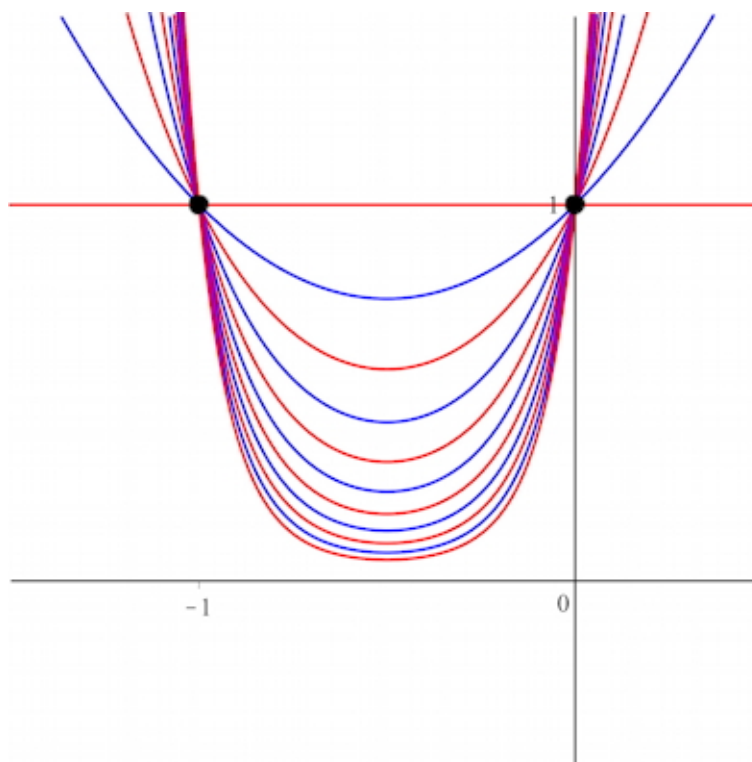


Abb. 2: Trinomialkurven

4 Tetranomialkurven

(Ich frage mich, ob die griechischen Zahlwörter hier angebracht sind.)

$$(x^3 + x^2 + x + 1)^0 = 1$$

$$(x^3 + x^2 + x + 1)^1 = 1x^3 + 1x^2 + 1x + 1$$

$$(x^3 + x^2 + x + 1)^2 = 1x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$(x^3 + x^2 + x + 1)^3 = 1x^9 + 3x^8 + 6x^7 + 10x^6 + 12x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1$$

$$(x^3 + x^2 + x + 1)^4 = x^{12} + 4x^{11} + 10x^{10} + 20x^9 + 31x^8 + 40x^7 + 44x^6 + 40x^5 + 31x^4 + 20x^3 + 10x^2 + 4x + 1$$

Jede Zahl ist die Summe der vier nächstgelegenen Zahlen in der oberen Reihe.

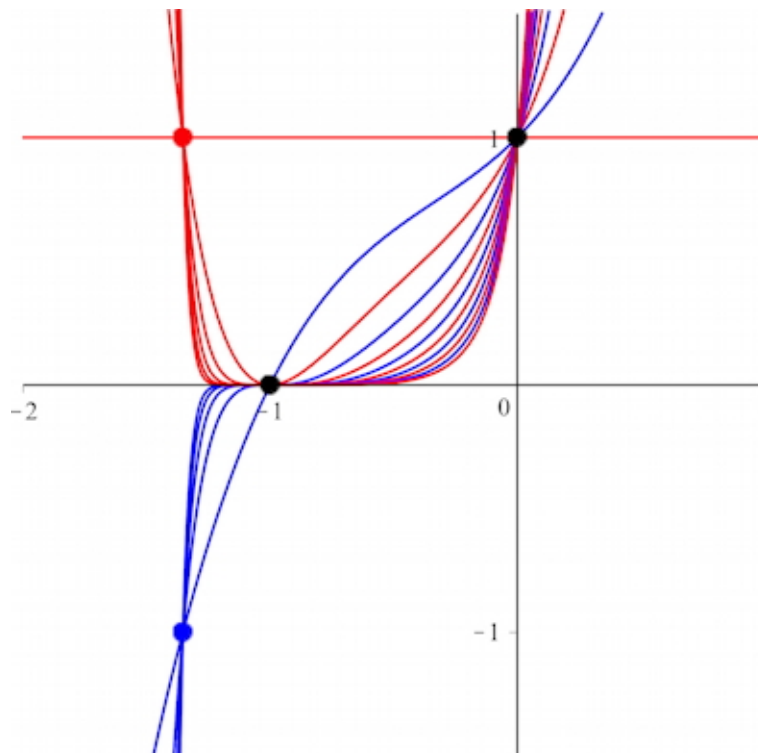


Abb. 3: Tetranomialkurven

Der rote und der blaue Punkt links haben die x -Koordinate (CAS):

$$x = -\frac{1}{6} \left(188 + 12\sqrt{249} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3 \left(188 + 12\sqrt{249} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3} \approx -1.353209965$$

5 Pentanomialkurven

$$(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^0 = 1$$

$$(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^1 = 1x^4 + 1x^3 + 1x^2 + 1x + 1$$

$$(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2 = 1x^8 + 2x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^3 = 1x^{12} + 3x^{11} + 6x^{10} + 10x^9 + 15x^8 + 18x^7 + 19x^6 + 18x^5 + 15x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1$$

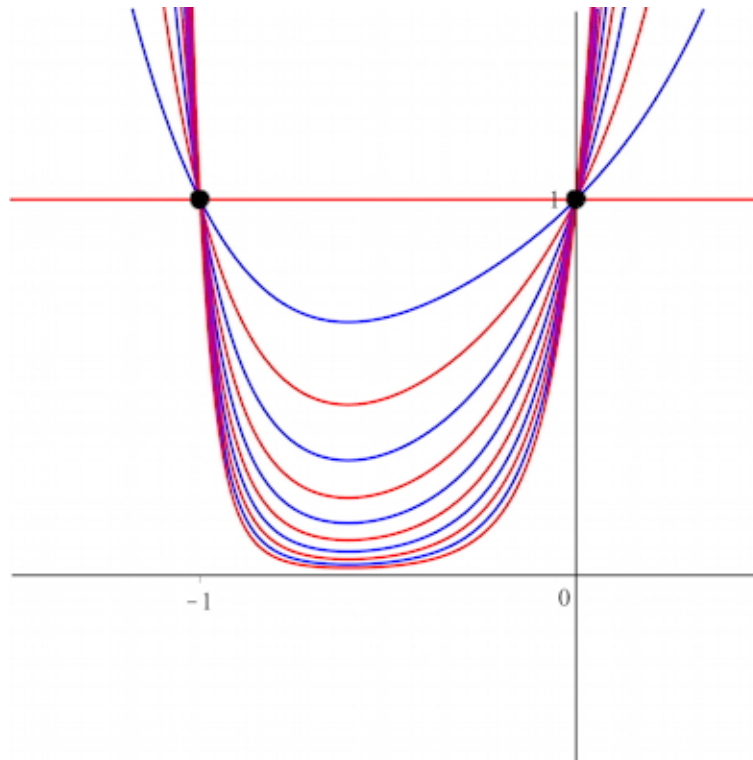


Abb. 4: Pentanomialkurven

6 Hexanomialkurven

$$\begin{aligned} (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^0 &= 1 \\ (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^1 &= 1x^5 + 1x^4 + 1x^3 + 1x^2 + 1x + 1 \\ (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2 &= 1x^{10} + 2x^9 + 3x^8 + 4x^7 + 5x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\ (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^3 &= 1x^{15} + 3x^{14} + 6x^{13} + 10x^{12} + 15x^{11} + 21x^{10} + 25x^9 + 27x^8 + 27x^7 + 25x^6 + 21x^5 + 15x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

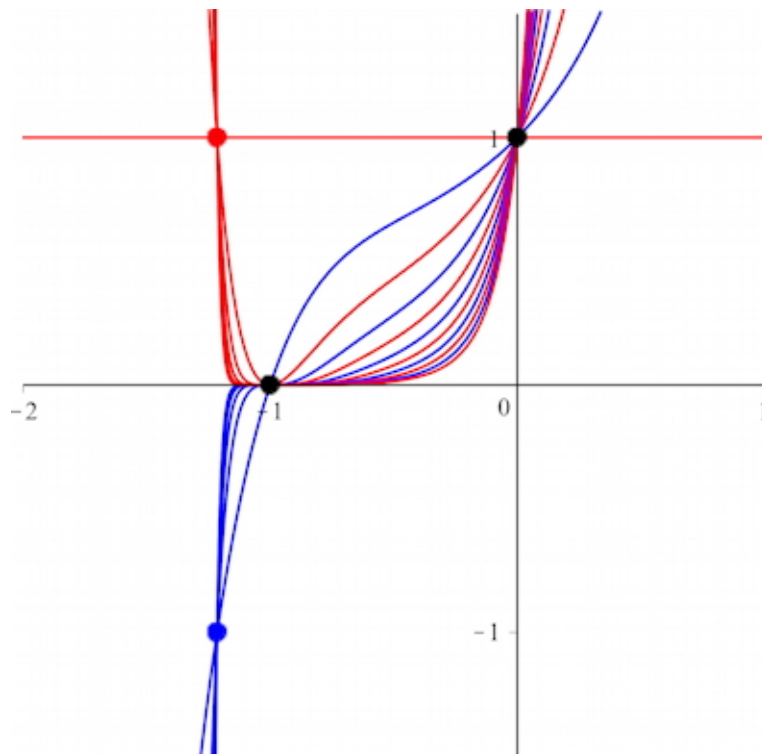


Abb. 5: Hexanomialkurven

Der rote und der blaue Punkt links haben die x -Koordinate (CAS)
 $x \approx -1.21486232248842$.

7 Heptanomialkurven

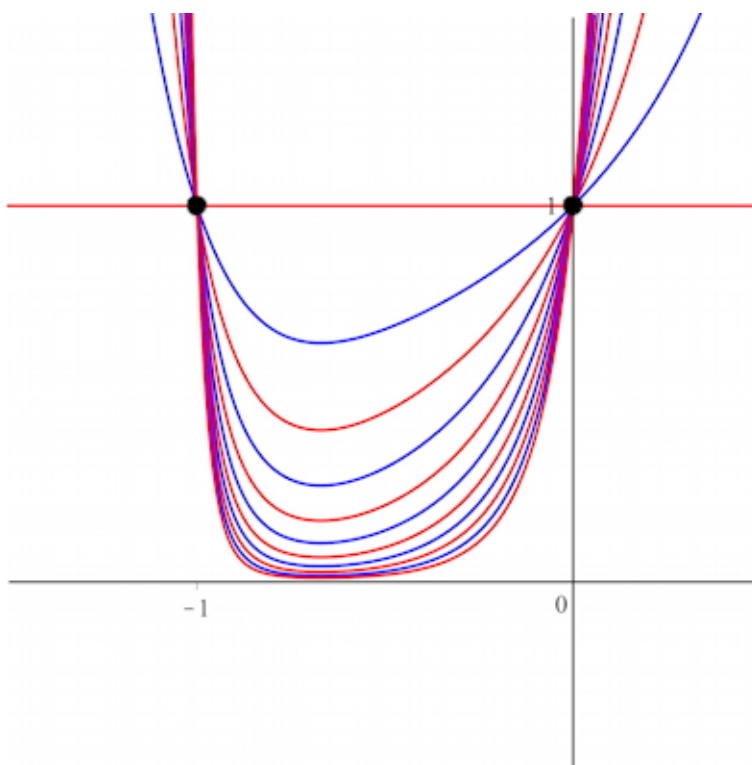


Abb. 6: Heptanomialkurven

8 Oktanomialkurven

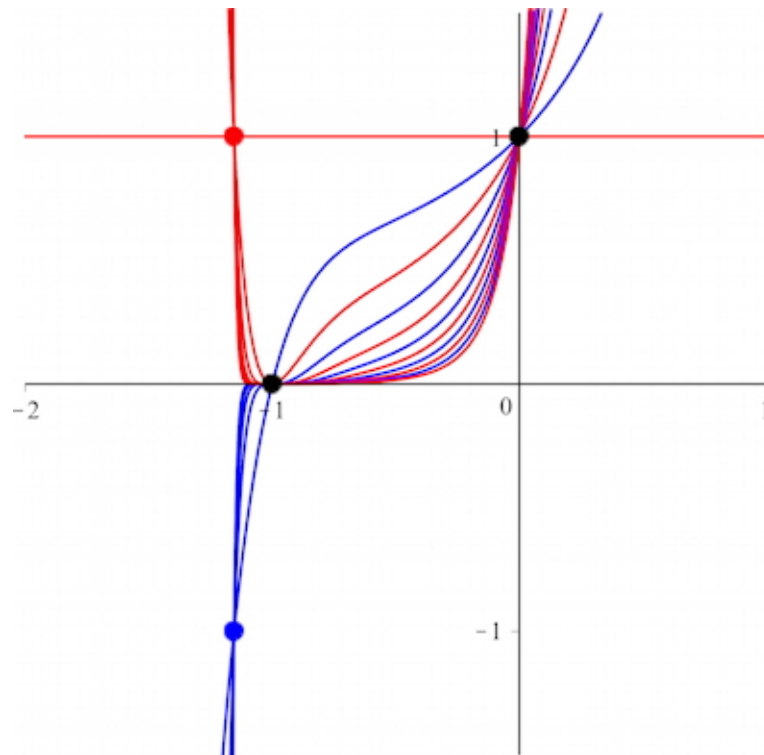


Abb. 7: Oktanomialkurven

9 Paritätsunterschiede

Für ungerades k verlaufen die Kurven oberhalb der x -Achse und durch die beiden Punkte $(0, 1)$ und $(-1, 1)$.

Die Abbildung 8 zeigt die Situation für $k = 49$.

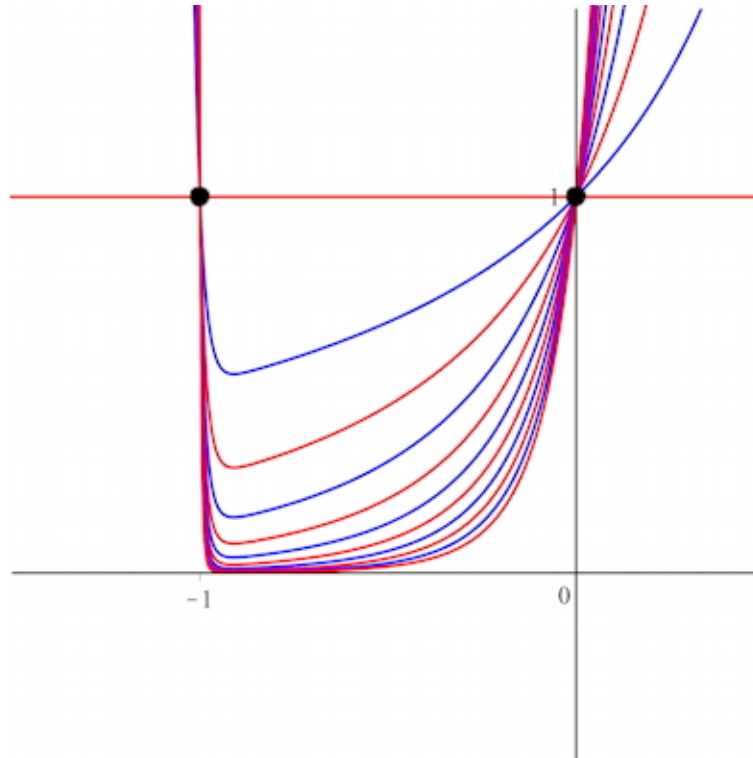


Abb. 8: $k = 49$

Für gerades k ist die Sache spannender. Alle Kurven verlaufen durch $(0, 1)$, und bis auf die Kurve für $n = 0$ durch $(-1, 0)$. Die Kurven für gerades n verlaufen durch einen Punkt mit einer x -Koordinate < -1 und der y -Koordinate 1 , für ungerades n ist die y -Koordinate -1 .

Die Abbildung 9 zeigt die Situation für $k = 50$.

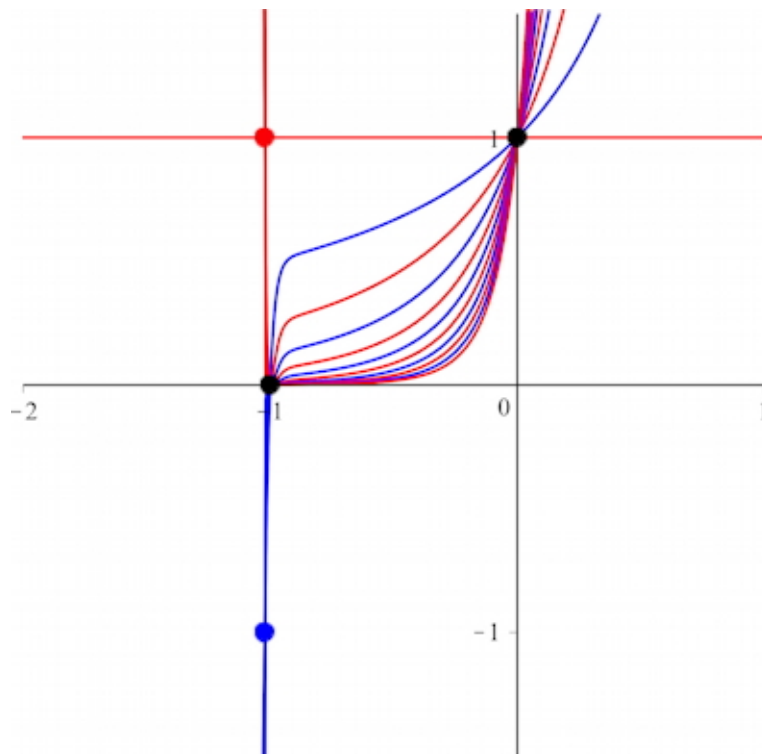


Abb. 9: $k = 50$

Der rote und der blaue Punkt haben die x -Koordinate: $x \approx -1.022367287$.

Diese x -Koordinaten finden sich als Lösung der Gleichung:

$$\sum_{j=0}^{k-1} x^j = -1$$

Die Tabelle 1 gibt die Lösungen (CAS) für $k = 2, 4, \dots, 50$.

k	x -Koordinate
2	-2
4	-1.353209965
6	-1.214862322
8	-1.154423057
10	-1.120528255
12	-1.098836878
14	-1.083763094
16	-1.072679116
18	-1.064185914
20	-1.057470136
22	-1.052026651
24	-1.047525179
26	-1.043740659
28	-1.040514435
30	-1.037731451
32	-1.035306233
34	-1.033173957
36	-1.031284569
38	-1.029598804
40	-1.028085427
42	-1.026719281
44	-1.025479877
46	-1.024350359
48	-1.023316734
50	-1.022367287

Tab. 1: x -Koordinaten