Hans Walser, [20150117]

k-nomialkurven

1 Worum geht es?

Die Polynome, welche zu den Bi-, Tri, ... , k-nomialkoeffizienten führen, werden als Funktionsterme gedeutet und die zugehörigen Grafen geplottet.

Die k-nomialkoeffizienten ergeben sich als Koeffizienten von:

$$\left(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1\right)^n=\left(\sum_{j=0}^{k-1}x^j\right)^n$$

Die k-nomialkurven sind die Funktionsgrafen von.

$$f_n:x\mapsto\left(\sum_{j=0}^{k-1}x^j\right)^n$$

2 Binomialkurven

Die Binomialkoeffizienten können als Koeffizienten von $(x+1)^n$ generiert werden:

$$(x+1)^0 = 1$$
$$(x+1)^1 = 1x+1$$
$$(x+1)^2 = 1x^2+2x+1$$
$$(x+1)^3 = 1x^3+3x^2+3x+1$$
$$(x+1)^4 = 1x^4+4x^3+6x^2+4x+1$$
$$(x+1)^5 = 1x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$$
$$(x+1)^6 = 1x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$$
$$(x+1)^7 = 1x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1$$
$$(x+1)^8 = 1x^8+8x^7+28x^6+56x^5+70x^4+56x^3+28x^2+8x+1$$
$$(x+1)^9 = 1x^9+9x^8+36x^7+84x^6+126x^5+126x^4+84x^3+36x^2+9x+1$$
$$(x+1)^{10} = 1x^{10}+10x^9+45x^8+120x^7+210x^6+252x^5+210x^4+120x^3+45x^2+10x+1$$

Die Abbildung 1 zeigt nun die Grafen der Funktionen $f_n(x)=(x+1)^n$ für $n \in \{1,2,...,10\}$. Für gerade n sind die Kurven rot, für ungerade n blau gezeichnet.

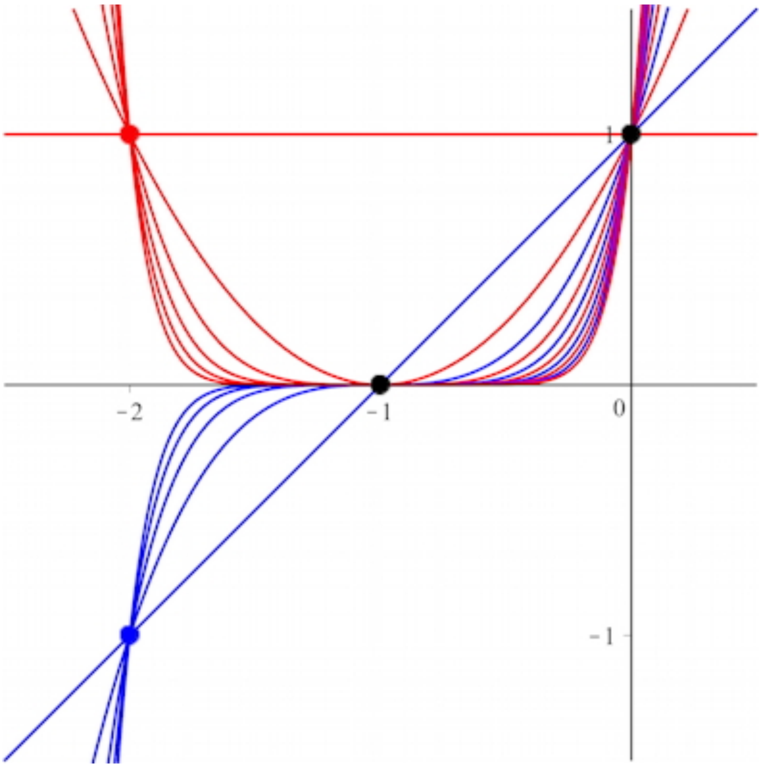

Abb. 1: Binomialkurven

3 Trinomialkurven

Die Binomialkoeffizienten können als Koeffizienten von $\left(x^2+x+1\right)^n$ generiert werden:

$$(x^2+x+1)^0=1$$
$$(x^2+x+1)^1=1x^2+1x+1$$
$$(x^2+x+1)^2=1x^4+2x^3+3x^2+2x+1$$
$$(x^2+x+1)^3=1x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$$
$$(x^2+x+1)^4=1x^8+4x^7+10x^6+16x^5+19x^4+16x^3+10x^2+4x+1$$
$$(x^2+x+1)^5=1x^{10}+5x^9+15x^8+30x^7+45x^6+51x^5+45x^4+30x^3+15x^2+5x+1$$

Die Rekursion ist offensichtlich. Jede Zahl ist die Summe der drei nächstgelegenen Zahlen in der oberen Reihe.

Die Abbildung 2 zeigt nun die Grafen der Funktionen $f_n(x)=\left(x^2+x+1\right)^n$ für $n\in\{1,2,...,10\}$. Für gerade n sind die Kurven rot, für ungerade n blau gezeichnet.

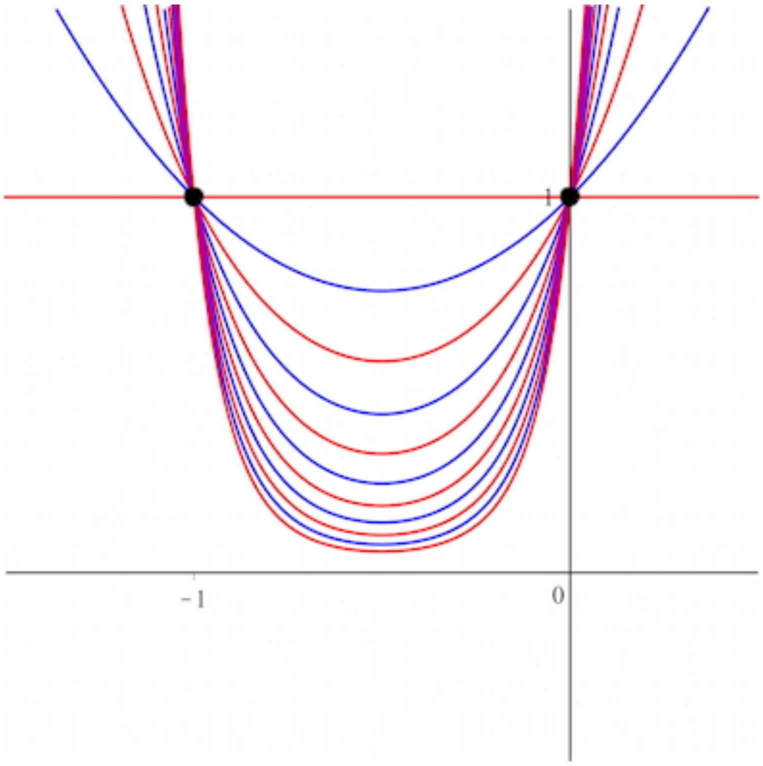

Abb. 2: Trinomialkurven

4 Tetranomialkurven

(Ich frage mich, ob die griechischen Zahlwörter hier angebracht sind.)

$$(x^3+x^2+x+1)^0 = 1$$
$$(x^3+x^2+x+1)^1 = 1x^3+1x^2+1x+1$$
$$(x^3+x^2+x+1)^2 = 1x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1$$
$$(x^3+x^2+x+1)^3 = 1x^9+3x^8+6x^7+10x^6+12x^5+12x^4+10x^3+6x^2+3x+1$$
$$(x^3+x^2+x+1)^4 = x^{12}+4x^{11}+10x^{10}+20x^9+31x^8+40x^7+44x^6+40x^5+31x^4+20x^3+10x^2+4x+1$$

Jede Zahl ist die Summe der vier nächstgelegenen Zahlen in der oberen Reihe.

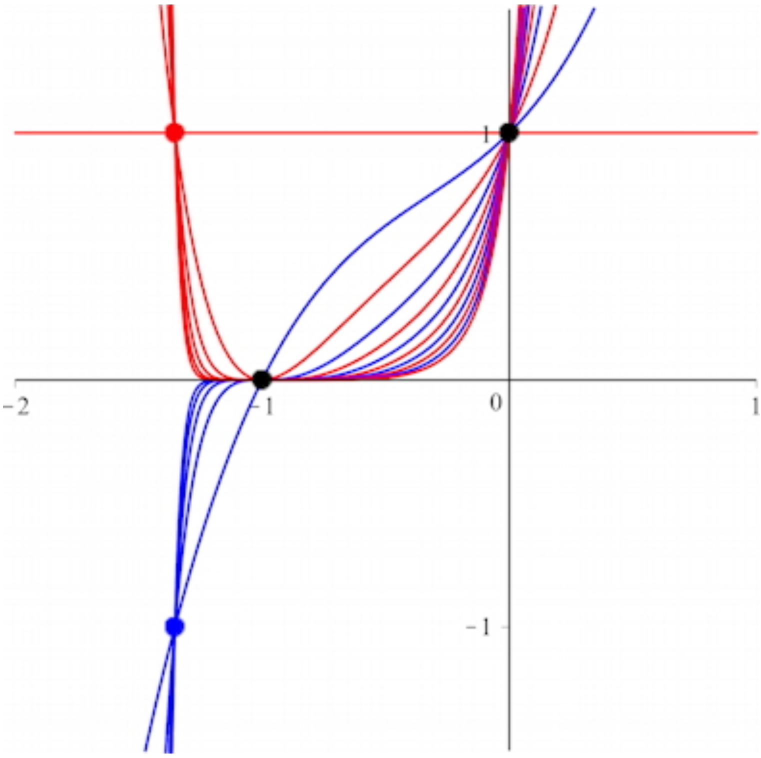

Abb. 3: Tetranomialkurven

Der rote und der blaue Punkt links haben die x-Koordinate (CAS):

$$x = -\tfrac{1}{6}\left(188+12\sqrt{249}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3\left(188+12\sqrt{249}\right)^{\frac{1}{3}}} - \tfrac{1}{3} \approx -1.353209965$$

5 Pentanomialkurven

$$(x^4+x^3+x^2+x+1)^0 = 1$$
$$(x^4+x^3+x^2+x+1)^1 = 1x^4+1x^3+1x^2+1x+1$$
$$(x^4+x^3+x^2+x+1)^2 = 1x^8+2x^7+3x^6+4x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$$
$$(x^4+x^3+x^2+x+1)^3 = 1x^{12}+3x^{11}+6x^{10}+10x^9+15x^8+18x^7+19x^6+18x^5+15x^4+10x^3+6x^2+3x+1$$

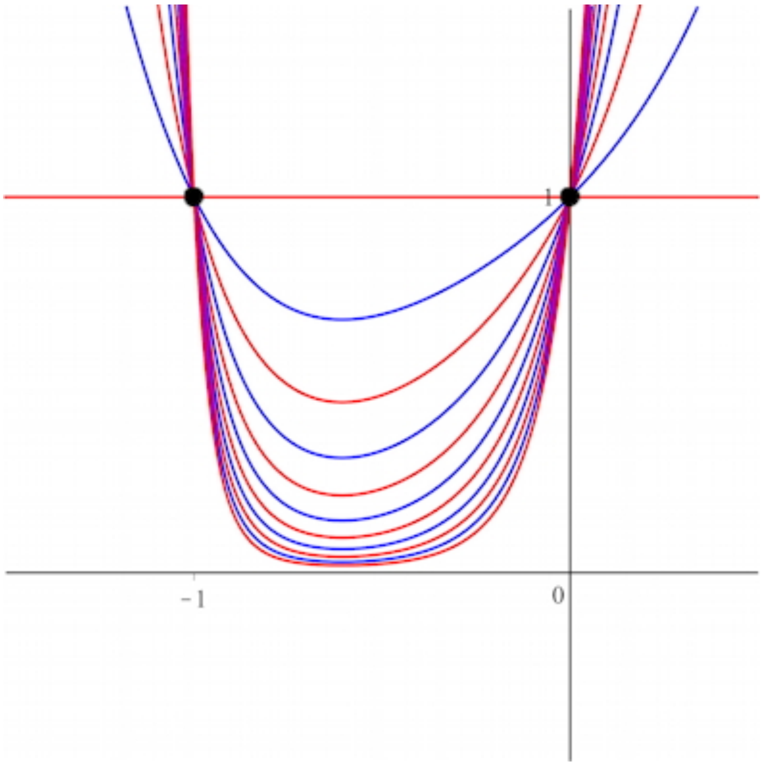

Abb. 4: Pentanomialkurven

6 Hexanomialkurven

$$(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^0=1$$
$$(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^1=1x^5+1x^4+1x^3+1x^2+1x+1$$
$$(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2=1x^{10}+2x^9+3x^8+4x^7+5x^6+6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$$
$$(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^3=1x^{15}+3x^{14}+6x^{13}+10x^{12}+15x^{11}+21x^{10}+25x^9+27x^8+27x^7+25x^6+21x^5+15x^4+10x^3+6x^2+3x+1$$

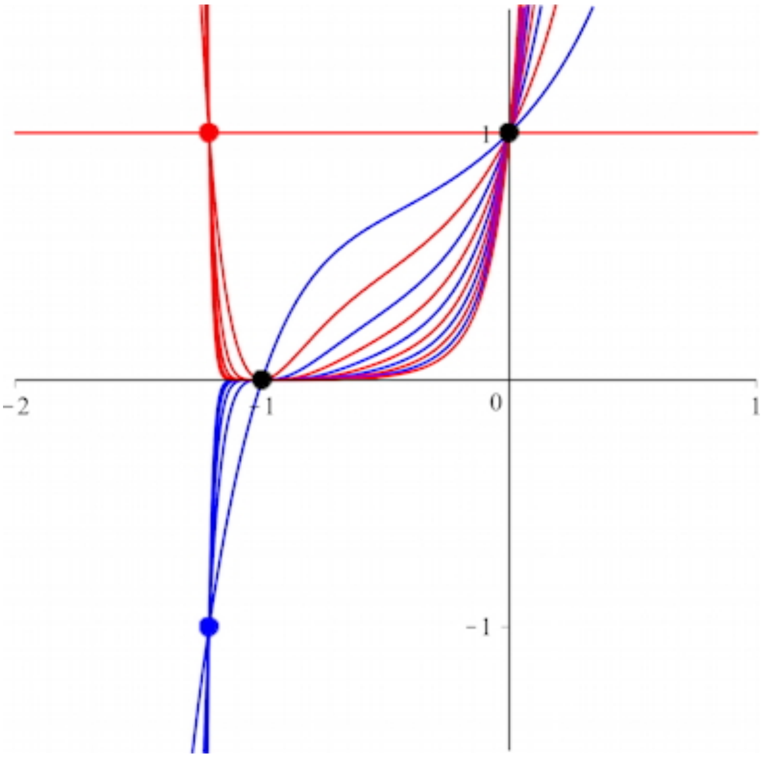

Abb. 5: Hexanomialkurven

Der rote und der blaue Punkt links haben die x-Koordinate (CAS) $x \approx -1.21486232248842$.

7 Heptanomialkurven

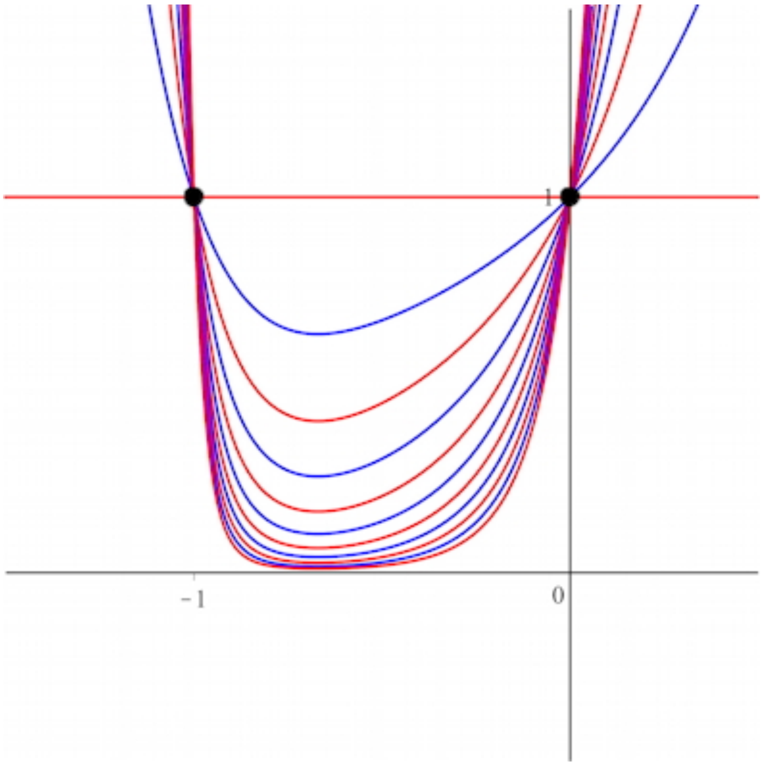

Abb. 6: Heptanomialkurven

8 Oktanomialkurven

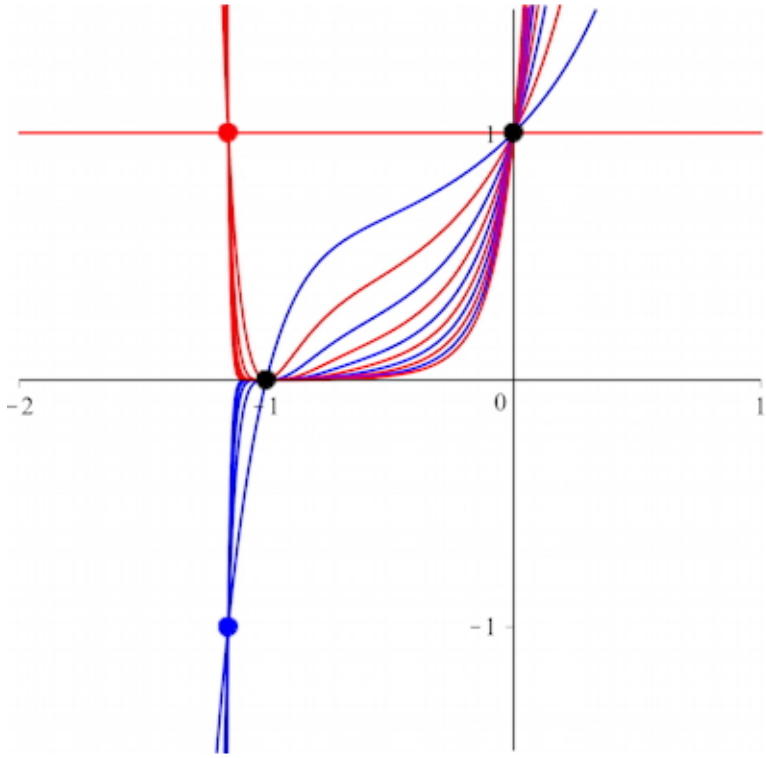

Abb. 7: Oktanomialkurven

9 Paritätsunterschiede

Für ungerades k verlaufen die Kurven oberhalb der x-Achse und durch die beiden Punkte $(0, 1)$ und $(-1, 1)$.

Die Abbildung 8 zeigt die Situation für $k = 49$.

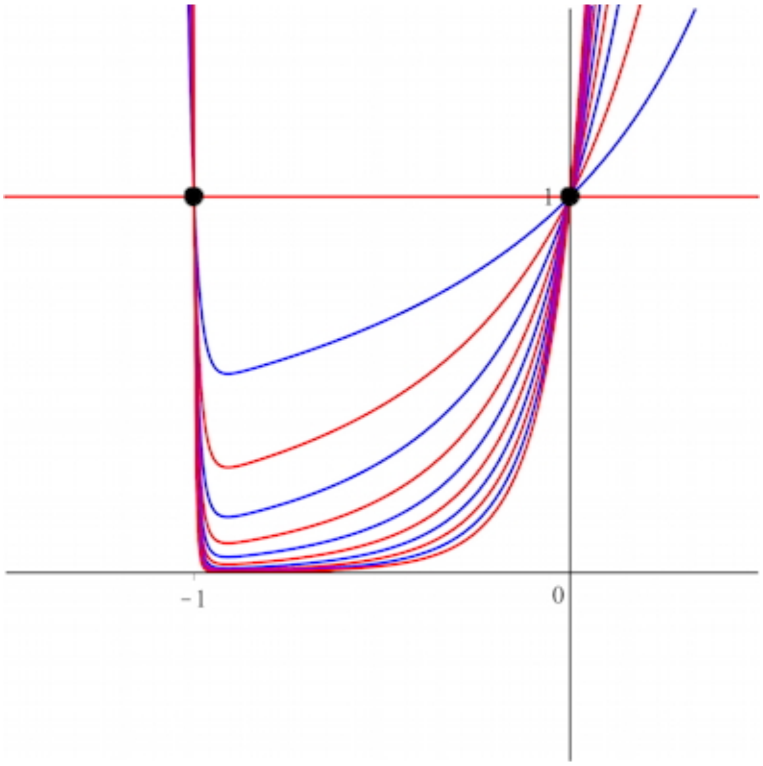

Abb. 8: *k* = 49

Für gerades k ist die Sache spannender. Alle Kurven verlaufen durch $(0, 1)$, und bis auf die Kurve für $n = 0$ durch $(-1, 0)$. Dir Kurven für gerades n verlaufen durch einen Punkt mit einer x-Koordinate < -1 und der y-Koordinate 1, für ungerades n ist die y-Koordinate -1.

Die Abbildung 9 zeigt die Situation für $k = 50$.

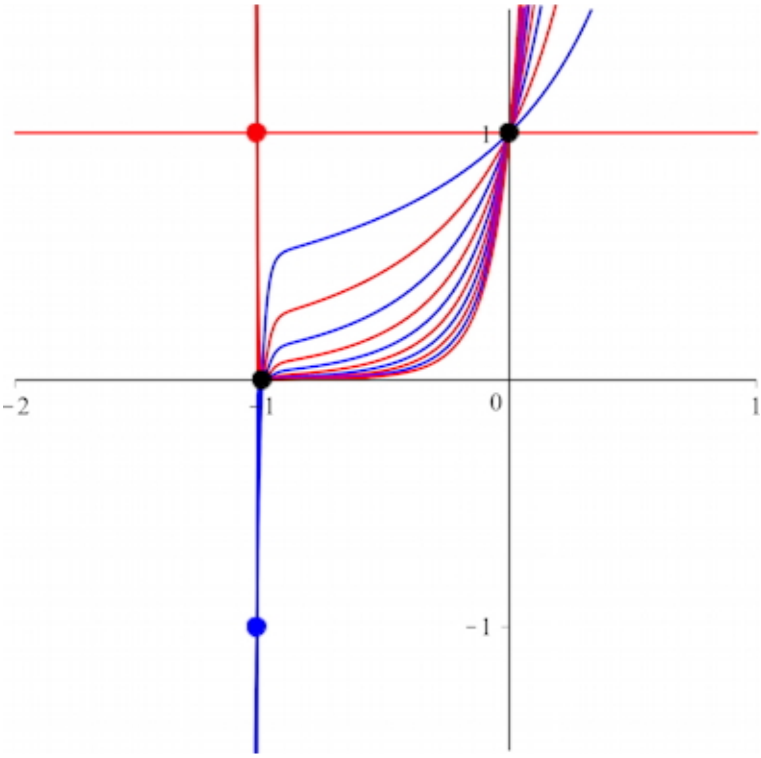

Abb. 9: *k* = 50

Der rote und der blaue Punkt haben die x-Koordinate: $x \approx -1.022367287$.

Diese x-Koordinaten finden sich als Lösung der Gleichung:

$$\sum_{j=0}^{k-1} x^j = -1$$

Die Tabelle 1 gibt die Lösungen (CAS) für $k = 2, 4, \ldots, 50$.

k	x-Koordinate
2	–2
4	–1.353209965
6	–1.214862322
8	–1.154423057
10	–1.120528255
12	–1.098836878
14	–1.083763094
16	–1.072679116
18	–1.064185914
20	–1.057470136
22	–1.052026651
24	–1.047525179
26	–1.043740659
28	–1.040514435
30	–1.037731451
32	–1.035306233
34	–1.033173957
36	–1.031284569
38	–1.029598804
40	–1.028085427
42	–1.026719281
44	–1.025479877
46	–1.024350359
48	–1.023316734
50	–1.022367287

Tab. 1: *x*-Koordinaten