Hans Walser, [20140202]

Kurven im Viereck

1 Unterteilung der Viereckseiten

Wir unterteilen die Seiten eines grünen Vierecks im gleichen Verhältnis. Dies kann auf zwei Arten geschehen.

Die Abbildung 1 zeigt eine „gegengleiche“ Unterteilung. Die vier Teilpunkte bilden ein diagonalenparalleles blaues Parallelogramm.

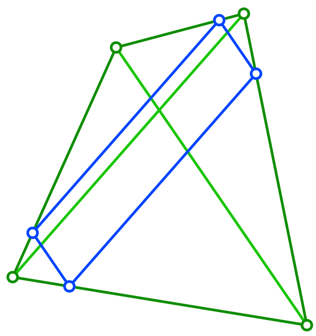

Abb. 1: Gegengleiche Unterteilung

Die Abbildung 2 zeigt eine gleichorientierte Unterteilung. Die vier Teilpunkte bilden ein unregelmäßiges blaues Viereck.

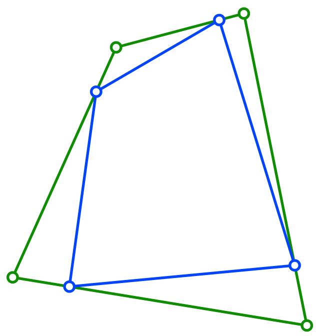

Abb. 2: Gleichsinnige Unterteilung

2 Gegengleiche Unterteilung

Der Ort der Mittelpunkte der blauen Parallelogramme (Abb. 1) ist eine Gerade durch die Mittelpunkte der beiden Diagonalen des grünen Viereckes (Abb. 3).

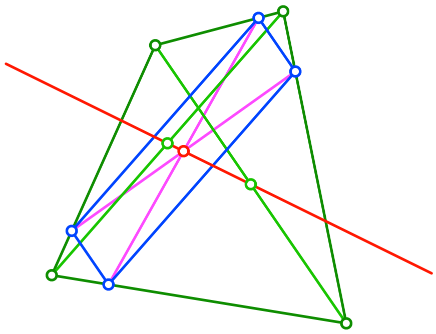

Abb. 3: Ort der Mittelpunkte

Nachweis rechnerisch. Es seien $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ die Ortsvektoren der Ecken des grünen Viereckes. Für die Eckpunkte des blauen Parallelgramms gilt dann der Reihe nach:

$$(1-\lambda)\vec{a}+\lambda\vec{b},\quad \lambda\vec{b}+(1-\lambda)\vec{c},\quad (1-\lambda)\vec{c}+\lambda\vec{d},\quad \lambda\vec{d}+(1-\lambda)\vec{a}$$

Für den Mittelpunkt des blauen Parallelogramms genügt es, den Mittelpunkt zweier gegenüberliegender Ecken zu nehmen, also:

$$\tfrac{1}{2}\Big(\big((1-\lambda)\vec{a}+\lambda\vec{b}\big)+\big((1-\lambda)\vec{c}+\lambda\vec{d}\big)\Big)=\tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})+\lambda\tfrac{1}{2}\big(-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}+\vec{d},\big)$$

Das ist eine Geradengleichung. Die Gerade verläuft für $\lambda=0$ beziehungsweise für $\lambda=1$ durch je einen Diagonalen-Mittelpunkt. Für $\lambda=\frac{1}{2}$ erhalten wir den Eckenschwerpunkt des grünen Viereckes.

3 Gleichsinnige Unterteilung

Dieser Fall ist spannender. Beim grünen Viereck können wir nicht mehr von einem „Mittelpunkt“ reden sondern müssen präzisieren.

3.1 Eckenschwerpunkte

Der Ort der Eckenschwerpunkte der blauen Vierecke ist ein fester Punkt, nämlich der Eckenschwerpunkt des grünen Viereckes.

Nachweis wiederum rechnerisch. Für die Ecken des blauen Viereckes gilt der Reihe nach:

$$(1-\lambda)\vec{a}+\lambda\vec{b},\quad (1-\lambda)\vec{b}+\lambda\vec{c},\quad (1-\lambda)\vec{c}+\lambda\vec{d},\quad (1-\lambda)\vec{d}+\lambda\vec{a}$$

Für den Eckenschwerpunkt erhalten wir daraus:

$$\tfrac{1}{4}\Big(\big((1-\lambda)\vec{a}+\lambda\vec{b}\big)+\big((1-\lambda)\vec{b}+\lambda\vec{c}\big)+\big((1-\lambda)\vec{c}+\lambda\vec{d}\big)+\big((1-\lambda)\vec{d}+\lambda\vec{a}\big)\Big)=\tfrac{1}{4}\big(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\big)$$

3.2 Diagonalen-Schnittpunkte

Die Abbildung 4 zeigt den Ort der Diagonalen-Schnittpunkte der blauen Vierecke.

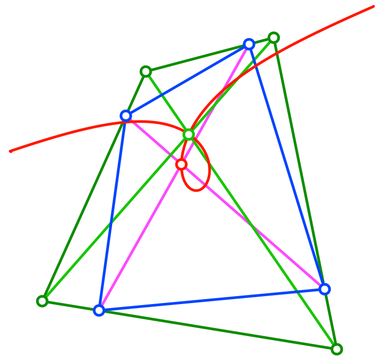

Abb. 4: Ort der Diagonalen-Schnittpunkte

Wir erhalten eine Kurve die ich nicht kenne. Sie hat im Diagonalen-Schnittpunkt des grünen Viereckes einen Doppelpunkt. Auch scheint sie an beiden Enden sich derselben Geraden asymtotisch anzunähern.