

Hans Walser, [20181209a]

Kubikzahlen

Visuelle Bearbeitung einer Aufgabe von Thomas Jahre, Chemnitz

1 Worum geht es?

$$1^3 = 1 = 1$$

$$2^3 = 8 = 3 + 5$$

$$3^3 = 27 = 7 + 9 + 11$$

$$4^3 = 64 = 13 + 15 + 17 + 19$$

$$5^3 = 125 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$$

Und?

(1)

2 Die ungeraden Zahlen

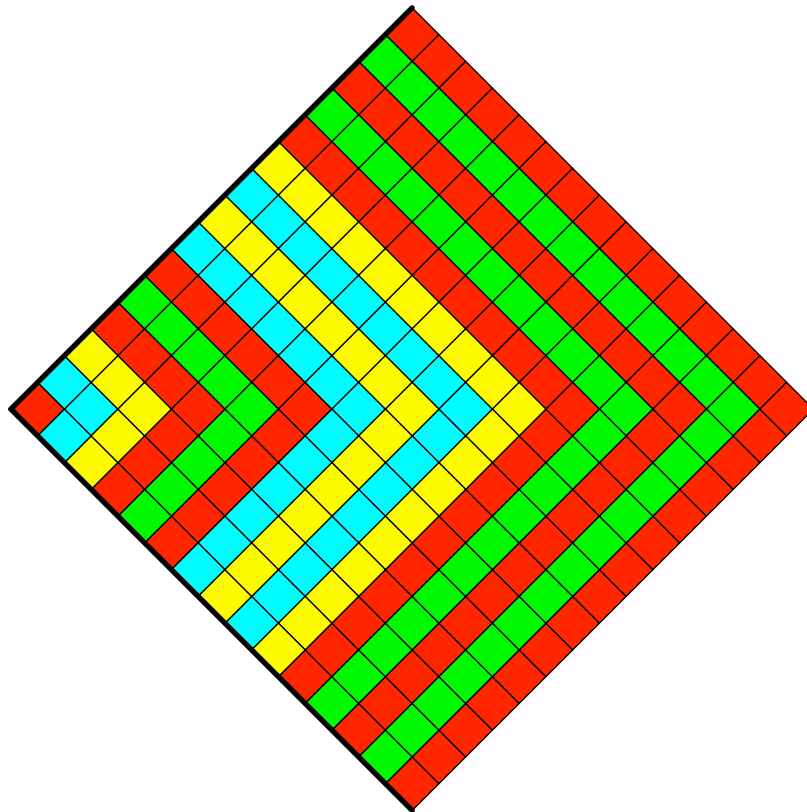


Abb. 1: Ungerade Zahlen

Die ungeraden Zahlen können als Winkel visualisiert werden (Abb. 1).

Die Zahl 1 entspricht dem kleinen roten Quadrat links.

Die Zahl 3 entspricht drei in einem Winkel angeordneten hellblauen Quadraten.

Die Zahl 5 entspricht fünf in einem Winkel angeordneten gelben Quadraten.

Und so weiter.

3 Gruppierung

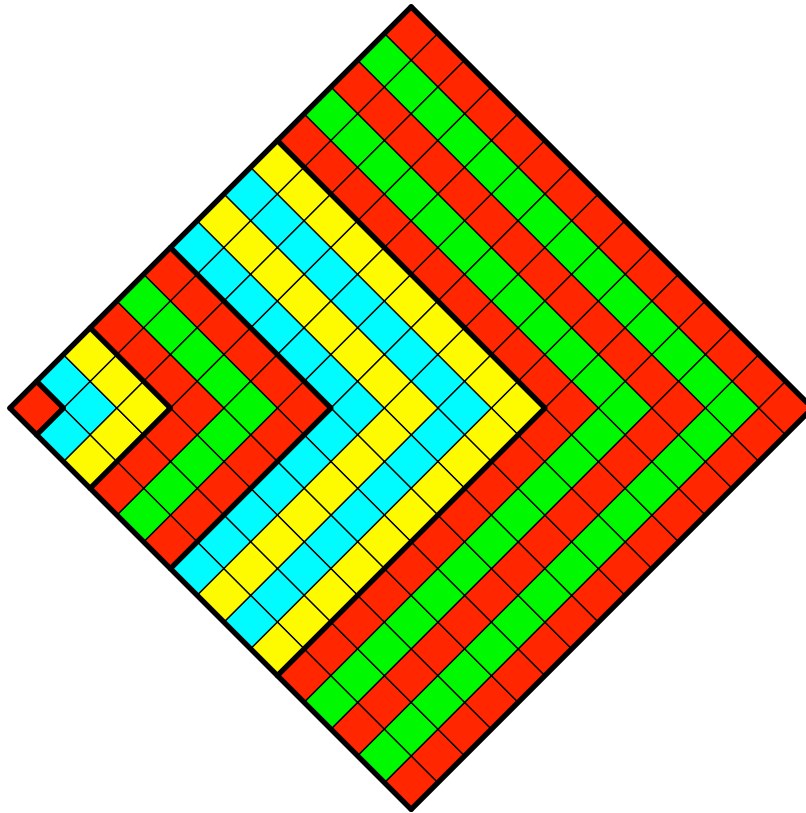


Abb. 2: Gruppierung

Wir gruppieren die Winkel in Gruppen von je 1, 2, 3, 4, 5, ... Winkeln. In der Abbildung 2 sind die Gruppen abwechselungsweise rot-grün und hellblau-gelb dargestellt. Die Gruppengrenzen sind mit dicken schwarzen Linien gezeichnet.

Durch diese Gruppierung erhalten wir dicke Winkel mit den Schenkelbreiten 1, 2, 3, 4, 5,

4 Umfärben

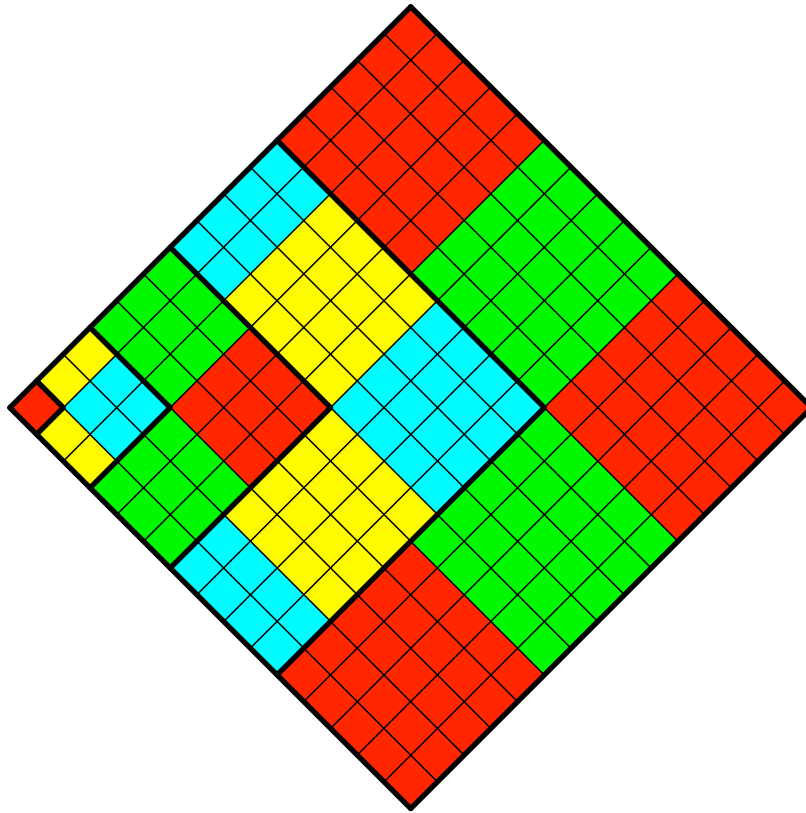


Abb. 3: Umfärben

Wir färben innerhalb jeder Gruppe (also in jedem dicken Winkel) um, so dass gleichfarbige Quadrate und an den Enden allenfalls halbe Quadrate entstehen (Abb. 3). Die Anzahlen der kleinen Quadrate in den beiden Farben einer Gruppe werden dabei verändert, die Gesamtzahl der kleinen Quadrate bleibt aber unverändert. Vgl. Nelsen (2000), S. 85.

5 Einbettung in den Raum

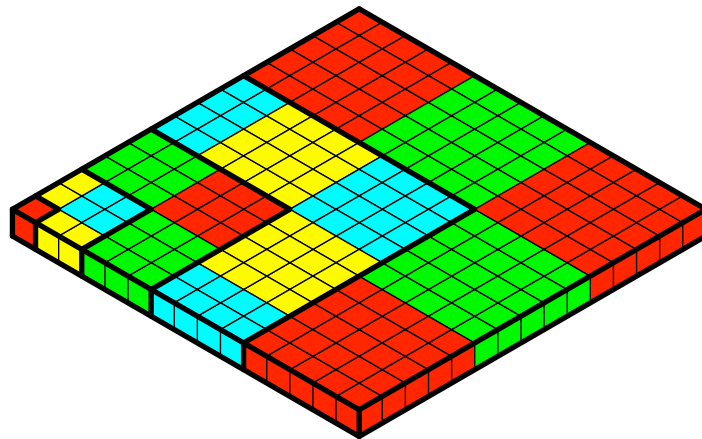


Abb. 4: Wir gehen in den Raum

6 Trennung der dicken Winkel

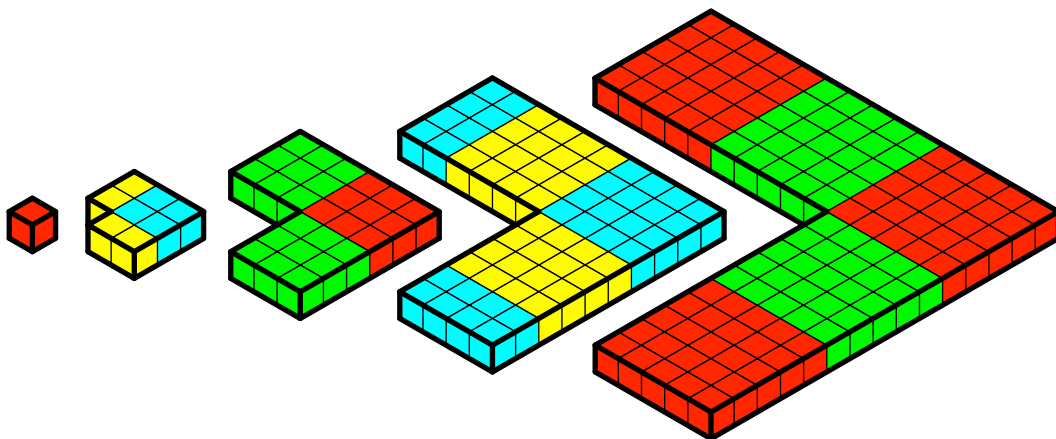


Abb. 5: Trennung der dicken Winkel

Jeder dicke Winkel ist aus n quadratischen Platten (allenfalls zwei halbe Platten) der Kantenlänge n zusammengesetzt.

7 Zerschneiden und Aufstapeln

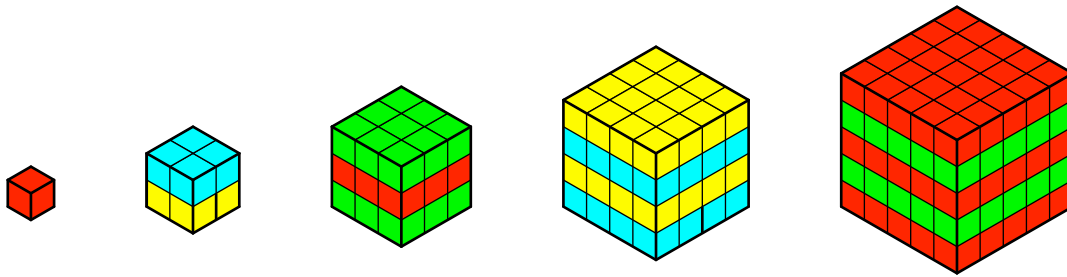


Abb. 6: Zerschneiden und Aufstapeln

Wir zerschneiden die dicken Winkel in diese Platten und stapeln diese aufeinander. So entstehen Würfel der Kantenlänge n . Damit ist (1) illustriert.

Literatur

Nelsen, Roger B. (2000): *Proofs without Words*. MAA, The Mathematical Association of America. ISBN 978-0883857007

Weblink

Hans Walser: Summenformel

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Summenformel/Summenformel.htm