Hans Walser, [20160206]

Krümmungen

1 Bögen

Wir zeichnen im Ursprung eine Strecke der Länge 2π senkrecht nach oben (Abb. 1). Dann krümmen wir nach rechts oder links mit den Krümmungen $\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm 1$.

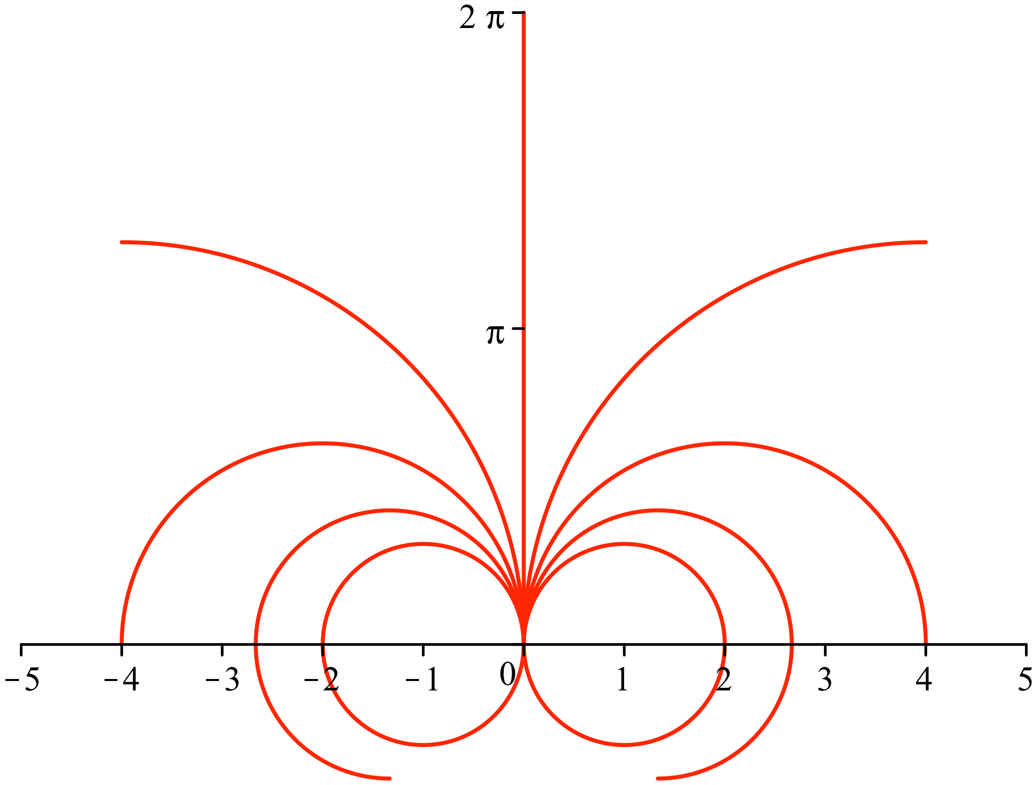

Abb. 1: Bögen der Länge 2π

Bei der Krümmung ± 1 erhalten wir je einen Einheitskreis.

Die Abbildung 2 zeigt dasselbe mit Krümmungen von –1 bis +1 in Schritten von Vierzigsteln.

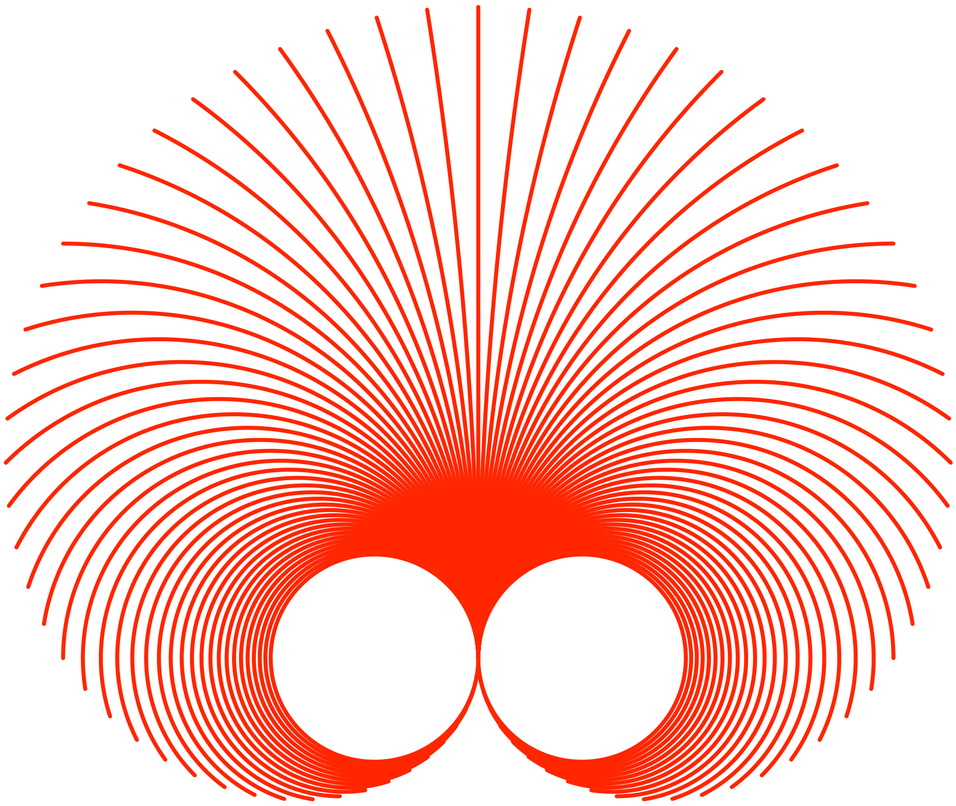

Abb. 2: Struwwelpeter

2 Herzkurve

Der Umriss der Figur ist eine Art Herzkurve (Abb. 3).

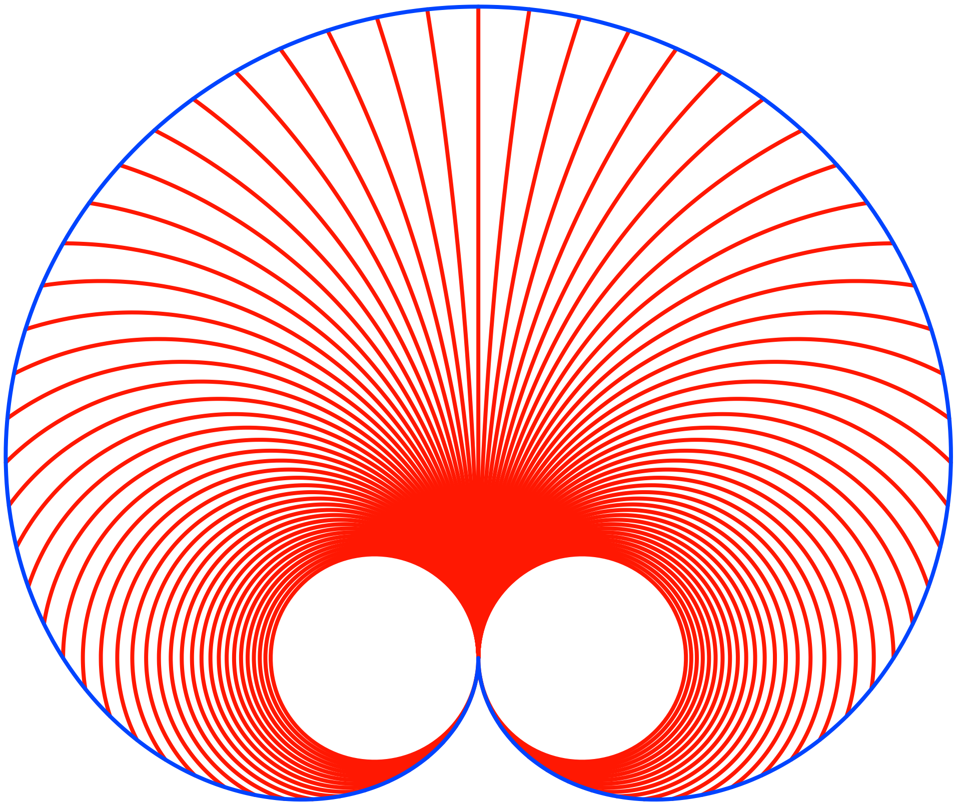

Abb. 3: Herzkurve

Diese Herzkurve hat die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(k) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\cos(2k\pi) \\ \frac{1}{k}\sin(2k\pi) \end{bmatrix}; \quad k \in [-1,1] \tag{1}$$

3 Vergleich mit Kardioide

Bei unserer Herzkurve handelt es sich *nicht* um die übliche Kardioide. In der Abbildung 4 ist zusätzlich die (passend skalierte) Kardioide schwarz eingezeichnet.

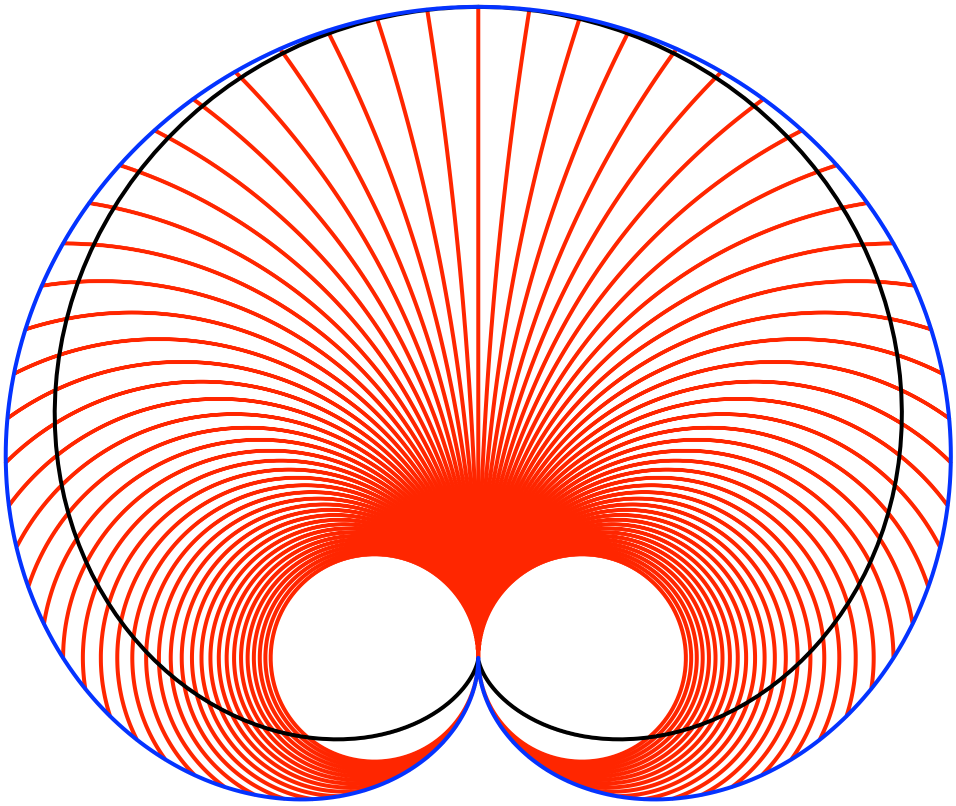

Abb. 4: Schwarze Kardioide

4 Ausgedehnter Parameterbereich

In der Abbildung 5 ist der Parameterbereich für die Krümmung k auf die reellen Zahlen ausgedehnt, also:

$$\vec{x}(k)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\cos(2k\pi) \\ \frac{1}{k}\sin(2k\pi) \end{bmatrix}; \quad k\in(-\infty,\infty) \tag{2}$$

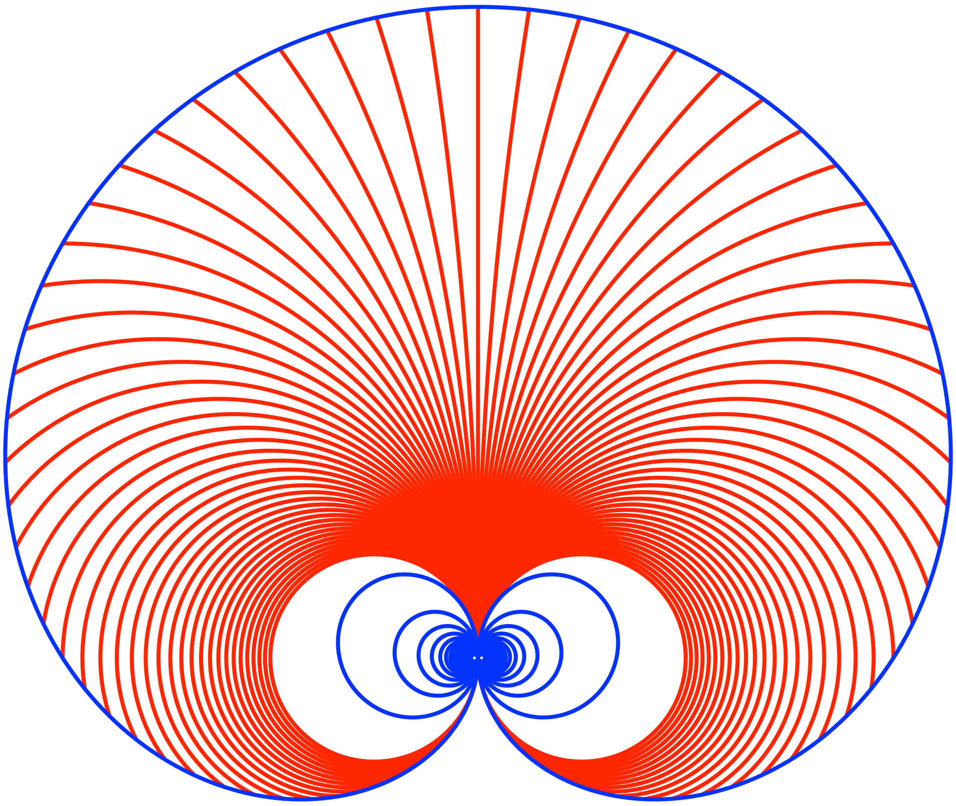

Abb. 5: Ausgedehnter Parameterbereich

5 Andere Parametrisierung

In [1] ist eine Herzkurve beschrieben, die optisch mit der unsrigen deckungsgleich ist. Skaliert auf die Disposition in unserem Fall hat sie die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix} \frac{2\pi\sin(t)}{t}\sin(t) \\ \frac{2\pi\sin(t)}{t}\cos(t) \end{bmatrix}; \quad t\in[-\pi,\pi] \tag{3}$$

Wir zeigen, dass (1) und (3) dieselbe Kurve beschreiben. Dazu formen wir (3) in (1) um.

Wegen der Symmetrie zur *y*-Achse können wir in (3) in der *x*-Komponente das Vorzeichen wechseln:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{2\pi}{t}\sin^2(t) \\ \frac{2\pi}{t}\sin(t)\cos(t) \end{bmatrix}; \quad t \in [-\pi, \pi] \tag{4}$$

Nun ersetzen wir $t = k\pi$ und erhalten:

$$\vec{x}(k\pi) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{k}\sin^2(k\pi) \\ \frac{2}{k}\sin(k\pi)\cos(k\pi) \end{bmatrix}; \quad k \in [-1, 1] \tag{5}$$

Weiter verwenden wir die trigonometrischen Identitäten:

$$\begin{aligned} -\sin^2(\alpha) &= \tfrac{1}{2}\left(-1 + \cos(2\alpha)\right) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) &= \tfrac{1}{2}\sin(2\alpha) \end{aligned} \tag{6}$$

Durch Anwenden von (6) in (5) erhalten wir (1). Dies war zu zeigen.

Website

[1] Herzkurve
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Herzkurve/Herzkurve.htm