

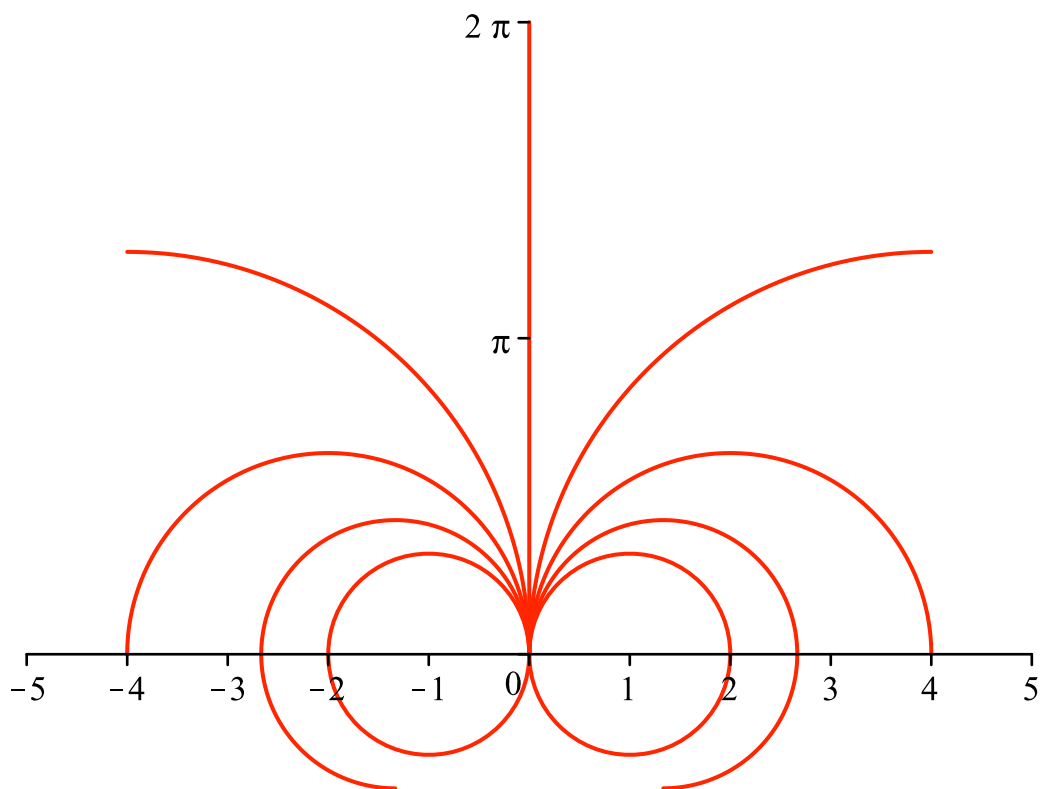
Hans Walser, [20160206]

## Krümmungen

### 1 Bögen

Wir zeichnen im Ursprung eine Strecke der Länge  $2\pi$  senkrecht nach oben (Abb. 1).

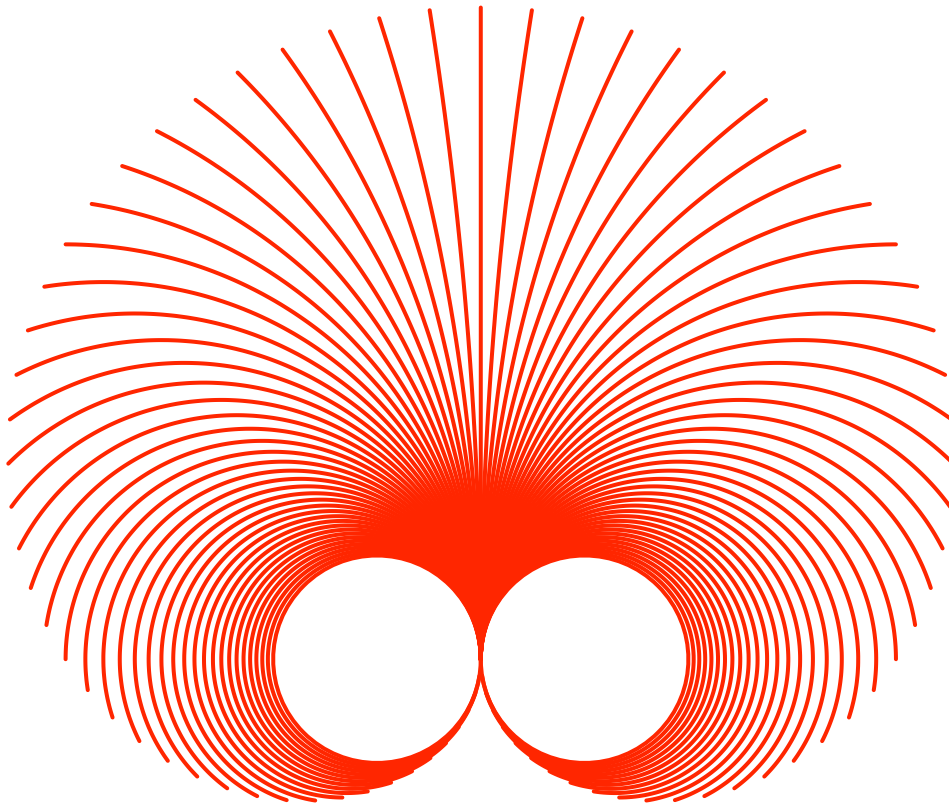
Dann krümmen wir nach rechts oder links mit den Krümmungen  $\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm 1$ .



**Abb. 1: Bögen der Länge  $2\pi$**

Bei der Krümmung  $\pm 1$  erhalten wir je einen Einheitskreis.

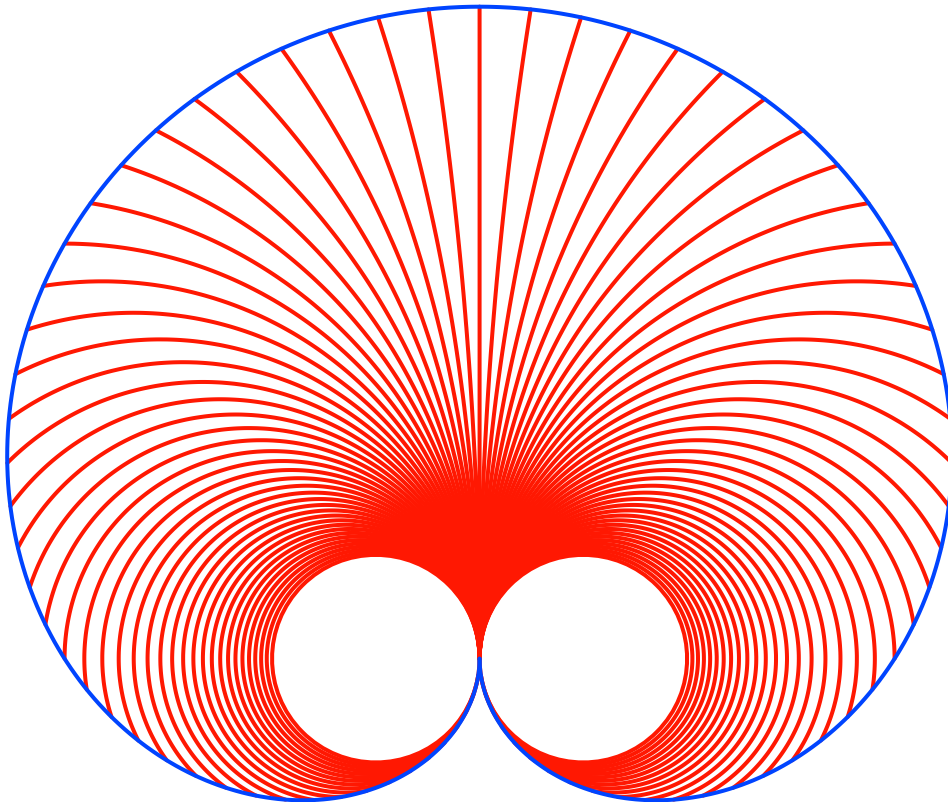
Die Abbildung 2 zeigt dasselbe mit Krümmungen von  $-1$  bis  $+1$  in Schritten von Vierteln.



**Abb. 2: Struwelpeter**

## **2 Herzkurve**

Der Umriss der Figur ist eine Art Herzkurve (Abb. 3).



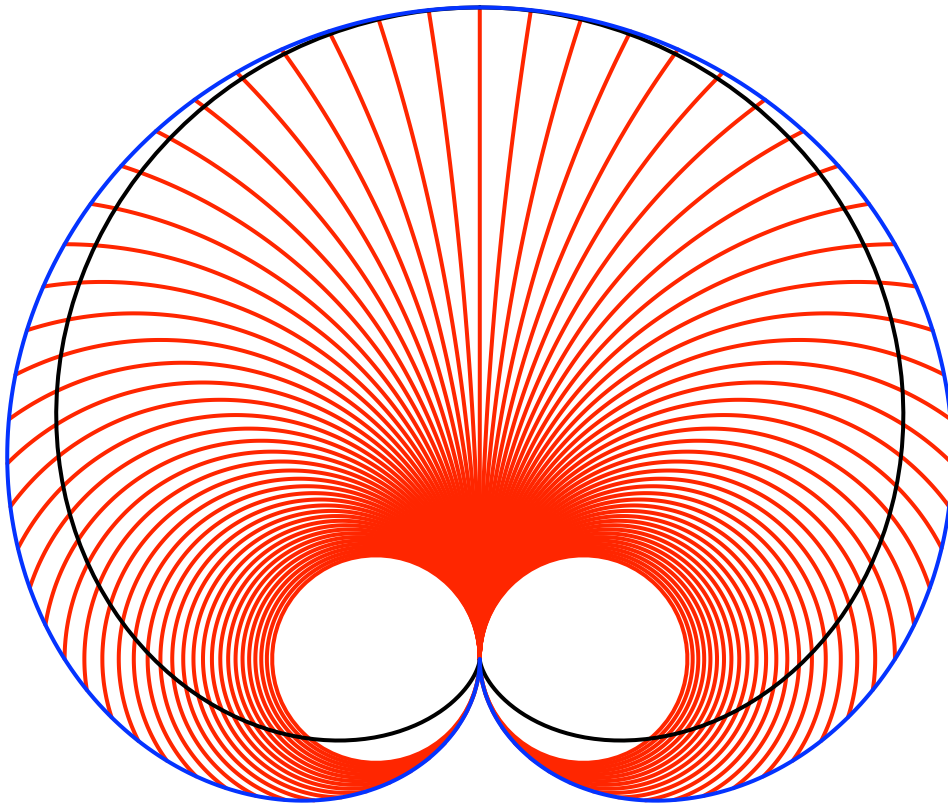
**Abb. 3: Herzkurve**

Diese Herzkurve hat die Parameterdarstellung:

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k} + \frac{1}{k} \cos(2k\pi) \\ \frac{1}{k} \sin(2k\pi) \end{bmatrix}; \quad k \in [-1, 1] \quad (1)$$

### 3 Vergleich mit Kardioiden

Bei unserer Herzkurve handelt es sich *nicht* um die übliche Kardioiden. In der Abbildung 4 ist zusätzlich die (passend skalierte) Kardioiden schwarz eingezeichnet.

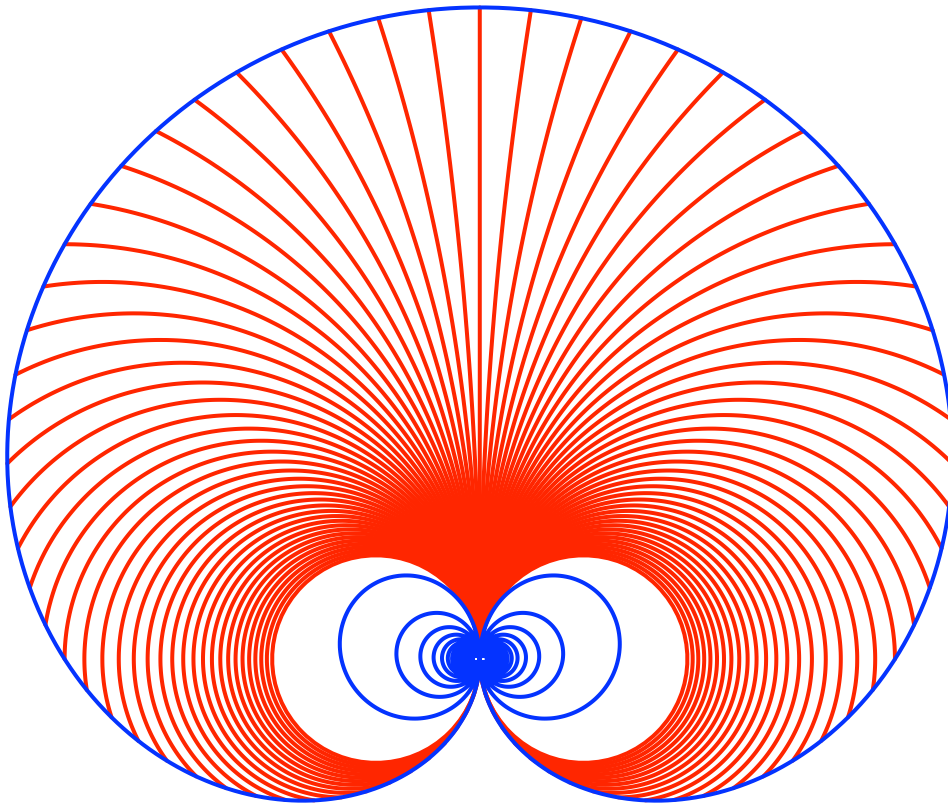


**Abb. 4: Schwarze Kardioide**

#### 4 Ausgedehnter Parameterbereich

In der Abbildung 5 ist der Parameterbereich für die Krümmung  $k$  auf die reellen Zahlen ausgedehnt, also:

$$\vec{x}(k) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k} + \frac{1}{k} \cos(2k\pi) \\ \frac{1}{k} \sin(2k\pi) \end{bmatrix}; \quad k \in (-\infty, \infty) \quad (2)$$



**Abb. 5: Ausgedehnter Parameterbereich**

## 5 Andere Parametrisierung

In [\[1\]](#) ist eine Herzkurve beschrieben, die optisch mit der unsrigen deckungsgleich ist. Skaliert auf die Disposition in unserem Fall hat sie die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2\pi \sin(t)}{t} \sin(t) \\ \frac{2\pi \sin(t)}{t} \cos(t) \end{bmatrix}; \quad t \in [-\pi, \pi] \quad (3)$$

Wir zeigen, dass (1) und (3) dieselbe Kurve beschreiben. Dazu formen wir (3) in (1) um.

Wegen der Symmetrie zur  $y$ -Achse können wir in (3) in der  $x$ -Komponente das Vorzeichen wechseln:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{2\pi}{t} \sin^2(t) \\ \frac{2\pi}{t} \sin(t) \cos(t) \end{bmatrix}; \quad t \in [-\pi, \pi] \quad (4)$$

Nun ersetzen wir  $t = k\pi$  und erhalten:

$$\vec{x}(k\pi) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{k} \sin^2(k\pi) \\ \frac{2}{k} \sin(k\pi) \cos(k\pi) \end{bmatrix}; \quad k \in [-1, 1] \quad (5)$$

Weiter verwenden wir die trigonometrischen Identitäten:

$$\begin{aligned} -\sin^2(\alpha) &= \frac{1}{2}(-1 + \cos(2\alpha)) \\ \sin(\alpha) \cos(\alpha) &= \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \end{aligned} \quad (6)$$

Durch Anwenden von (6) in (5) erhalten wir (1). Dies war zu zeigen.

### Website

[1] [Herzkurve](#)

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Herzkurve/Herzkurve.htm>