Hans Walser

Berechnung von π nach Vieta

Kurzfassung

In [1] werden auf Grund der Vielecksmethode zwei Formeln zur approximativen Berechung der Kreiszahl π hergeleitet. Aus diesen Formeln ergeben sich durch eine einfache Umrechnung die Formel von Vieta sowie weitere Formeln, darunter eine, die mit dem Goldenen Schnitt zur Berechnung von π führt.

1 Einbeschriebene $2 \cdot 2^n$-Ecke

Dem Einheitskreis werden sukzessive ein Durchmesser („Zweieck"), ein Quadrat, ein regelmäßiges Achteck, ein regelmäßiges 16-Eck etc. einbeschrieben. Es seien s_n die Seitenlänge und u_n der Umfang des regelmäßigen $2 \cdot 2^n$-Eckes. Unter Verwendung des Satzes von Pythagoras ergibt sich (vgl. [1]):

n	Polygon	s_n	u_n	$\frac{1}{2}u_n$, numerisch
0	Zweieck	2	$2 \cdot 2$	2.00000000000000
1	Quadrat	$\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	2.82842712474619
2	Achteck	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$8\sqrt{2-\sqrt{2}}$	3.06146745892072
3	16-Eck	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	3.12144515225805
4	32-Eck	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$	$32\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$	3.13654849054594

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}u_n = \pi$ haben wir damit eine Approximation der Kreiszahl π. Der Umfang u_n ist in dieser Darstellung das Produkt einer immer größer werdenden Zweierpotenz und eines immer kleiner werdenden Wurzelausdruckes. Dies führt bei der numerischen Bearbeitung (zum Beispiel mit Excel) zu Auslöschungseffekten (Tabellenausschnitt).

n	Zweierpotenz $2 \cdot 2^n$	Wurzelausdruck	$\frac{1}{2}u_n$
0	2	2.00000000000000	2.00000000000000
1	4	1.41421356237310	2.82842712474619
2	8	0.76536686473018	3.06146745892072
3	16	0.39018064403226	3.12144515225805
$\vdots$			
14	32768	0.00019174759856	3.14159265480759
$\vdots$			
24	33554432	0.00000018730469	3.14245127249413
25	67108864	0.00000009424322	3.16227766016838
26	134217728	0.00000004712161	3.16227766016838
27	268435456	0.00000002580957	3.46410161513775
28	536870912	0.00000001490116	4.00000000000000
29	1073741824	0.00000000000000	0.00000000000000

Wir können dieses Problem durch Faktorisierung umgehen. Dazu berechnen wir die Quotienten $q_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}$.

$$q_1 = \frac{4\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$q_2 = \frac{8\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{4-2}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$q_3 = \frac{16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{8\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = \frac{2\sqrt{4-2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

Es ist ein einheitliches Rechenmuster erkennbar:

$$q_n = \frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n\text{ Wurzeln}}}$$

Wegen $u_n = u_0 \prod_{k=1}^{n} q_k$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} u_n = \pi$ folgt die Formel von Vieta (François Viète, 1540-1603):

$$\pi = 2\,\frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\cdots$$

Hier treten keine Auslöschungseffekte auf.

2 Weitere Beispiele

Auf der Basis von Dreieck, Sechseck, Zwölfeck etc. ergibt sich entsprechend:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}\cdots$$

Für das regelmäßige Fünfeck, Zehneck, 20-Eck etc. benötigen wir den goldenen Schnitt; wir führen dafür die Notation $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ ein. Damit ist:

n	Polygon	s_n	u_n
0	Fünfeck	$\sqrt{3-\tau}$	$5\sqrt{3-\tau}$
1	Zehneck	$\sqrt{2-\tau}$	$10\sqrt{2-\tau}$
2	20-Eck	$\sqrt{2-\sqrt{2+\tau}}$	$20\sqrt{2-\sqrt{2+\tau}}$
3	40-Eck	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\tau}}}$	$40\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\tau}}}$
4	80-Eck	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\tau}}}}$	$80\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\tau}}}}$

$$q_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2+\tau}}}}}_{n\text{ Wurzeln}}}$$

$$\pi = \frac{5\sqrt{3-\tau}}{2}\,\frac{2}{\sqrt{2+\tau}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\tau}}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\tau}}}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\tau}}}}}\cdots$$

3 Hintergrund

Für die Seitenlänge s_n eines dem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen $p\cdot 2^n$-Eckes ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras die Rekursion:

$$s_{n+1} = \sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}}$$

Damit ist:

$$q_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{p \cdot 2^n}{p \cdot 2^{n-1}} = \frac{2 s_n}{s_{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_{n-1}^2}}}$$

Also zunächst:

$$q_1 = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_0^2}}} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_1^2}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{4-2+\sqrt{4-s_0^2}}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4-s_0^2}}}}$$

Unter wiederholter Verwendung der Rekursion $s_{n+1} = \sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}}$ und der Abkürzung $a = \sqrt{4-s_0^2}$ finden wir allgemein:

$$q_n = \frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2 \cdots + \sqrt{2+\sqrt{2+a}}}}}_{n \text{ Wurzeln}}}$$

Damit erhalten wir eine allgemeine Formel von Vieta:

$$\pi = \frac{p s_0}{2} \frac{2}{\sqrt{2+a}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+a}}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+a}}}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+a}}}}} \cdots$$

4 Sternfiguren

Die Formel funktioniert auch für rationale Zahlen p. So finden wir für $p = \frac{8}{3}$ (Fig. 1):

$$\pi = \frac{4\sqrt{2+\sqrt{2}}}{3} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}}} \cdots$$

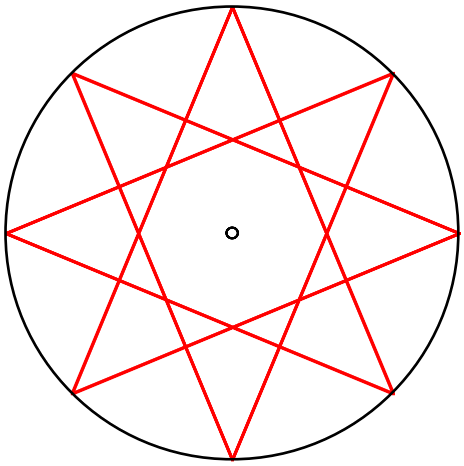

Fig. 1: Das $\frac{8}{3}$-Eck

Literatur

[1] *Quillmann, H.*: Übungen mit dem Satz des Pythagoras zur Ermittlung der Kreiszahl. PM, Heft 6/45. Jg. Dezember 2003. S. 285.