Berechnung der Kreiszahl π

Wir konstruieren die Fourier-Entwicklung von $f(t)=|t|$ im Intervall $[-\pi,\pi]$.

Die Funktion $f(t)=|t|$ ist gerade, also erscheinen nur Kosinusfunktionen in der Entwicklung. Es ist zunächst:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\pi^2=\pi$$

Ferner ist für $k\geq 1$:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\cos(kt)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}t\cos(kt)\,\mathrm{d}t}_{I_1}$$

$$I_1=\int_0^{\pi}t\cos(kt)\,\mathrm{d}t=\underbrace{\frac{1}{k}t\sin(kt)\Big|_0^{\pi}}_{0}-\frac{1}{k}\underbrace{\int_0^{\pi}\sin(kt)\,\mathrm{d}t}_{I_2}$$

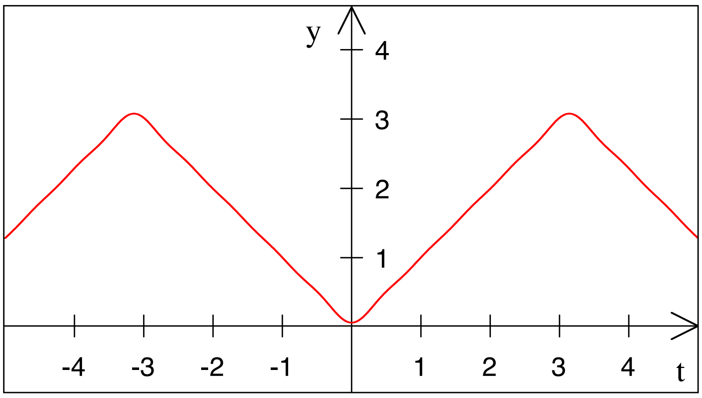
$$I_2=\int_0^{\pi}\sin(kt)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{k}\cos(kt)\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{k}\left((-1)^k-1\right)=\begin{cases}0 & \text{falls } k \text{ gerade}\\ \frac{2}{k} & \text{falls } k \text{ ungerade}\end{cases}$$

$$a_k=\begin{cases}0 & \text{falls } k \text{ gerade}\\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{falls } k \text{ ungerade}\end{cases}$$

Damit ist:

$$f(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos(t)+\frac{1}{9}\cos(3t)+\frac{1}{25}\cos(5t)+\cdots\right)$$

Die Figur zeigt die Entwicklung bis $k=9$.



Entwicklung bis $k = 9$

Für $t=0$ ist

$$f(0)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos(0)+\frac{1}{9}\cos(0)+\frac{1}{25}\cos(0)+\cdots\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots\right)=0$$

Daraus können wir π bestimmen:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right)$$

$$\pi^2 = 8\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right)$$

Somit ist:

$$\boxed{\pi = \sqrt{8}\sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots} = \sqrt{8}\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}}}$$

Die folgende Tabelle zeigt die ersten Schritte der Summenbildung:

k	2*k-1	1/(2*k-1)^2	Summe	sqrt(8)*sqrt(Summe)
1	1	1.00000	1.00000	2.82843
2	3	0.11111	1.11111	2.98142
3	5	0.04000	1.15111	3.03462
4	7	0.02041	1.17152	3.06140
5	9	0.01235	1.18386	3.07749
6	11	0.00826	1.19213	3.08821
7	13	0.00592	1.19805	3.09586
8	15	0.00444	1.20249	3.10160
9	17	0.00346	1.20595	3.10606
10	19	0.00277	1.20872	3.10963
11	21	0.00227	1.21099	3.11254
12	23	0.00189	1.21288	3.11497
13	25	0.00160	1.21448	3.11702
14	27	0.00137	1.21585	3.11878
15	29	0.00119	1.21704	3.12031
16	31	0.00104	1.21808	3.12164
17	33	0.00092	1.21900	3.12282
18	35	0.00082	1.21982	3.12386
19	37	0.00073	1.22055	3.12480
20	39	0.00066	1.22120	3.12564
21	41	0.00059	1.22180	3.12640
22	43	0.00054	1.22234	3.12709
23	45	0.00049	1.22283	3.12772
24	47	0.00045	1.22329	3.12830
25	49	0.00042	1.22370	3.12884

Das Verfahren ist nicht sehr effizient.

Die Formel

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

erinnert an die Formel von Euler:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Tatsächlich lässt sich die Formel $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ auch direkt aus der Formel von Euler herleiten: Zunächst ist:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

Daher ist:

$$\left(1-\tfrac{1}{4}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

Also:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$$

Umgekehrt lässt sich natürlich auch die Formel von Euler aus $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ herleiten:

Wir setzen $x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Dann ist:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$x=\frac{1}{4}x+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\frac{3}{4}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$x=\frac{\pi^2}{6}$$