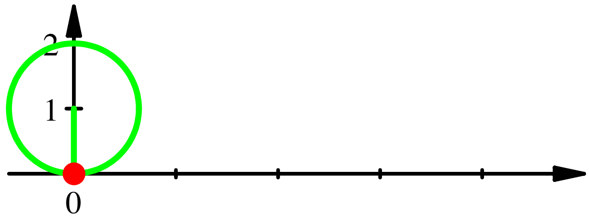
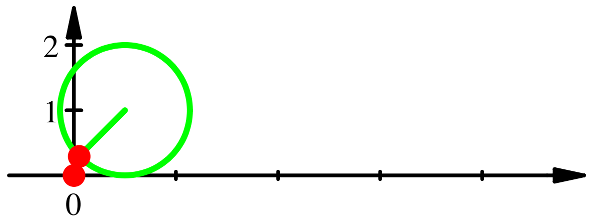
Hans Walser, [20090324a]

Kreisumfang. Wo steckt der Fehler?

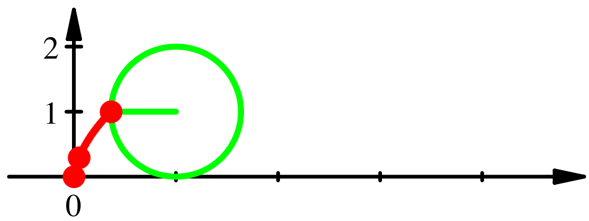
Wir rollen einen Kreis ab und verfolgen den Weg eines Punktes auf der Kreisperipherie. Die Figurenfolge illustriert den Bewegungsablauf in acht Schritten.



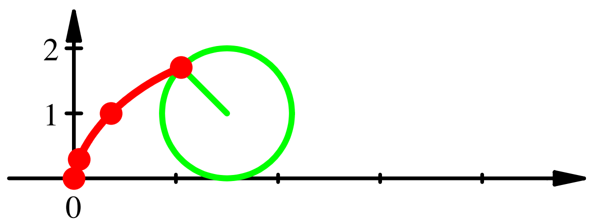
Start



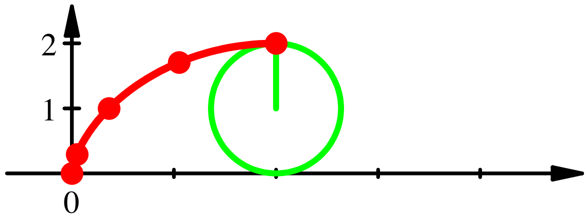
Erster Schritt



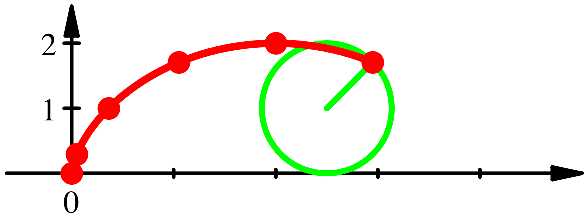
Zweiter Schritt



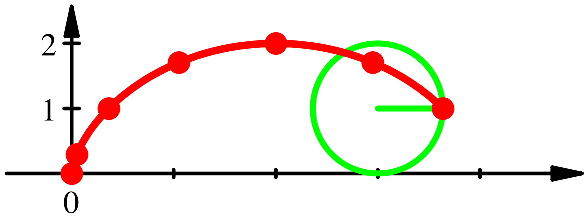
Dritter Schritt



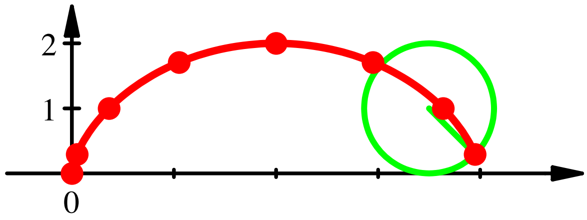
Halbzeit



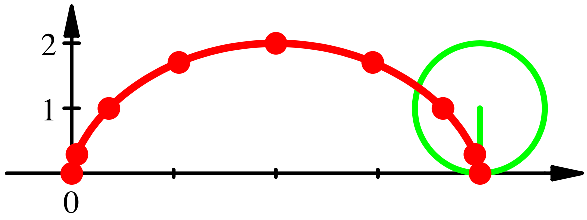
Fünfter Schritt



Sechster Schritt



Siebter Schritt



Uff — geschafft

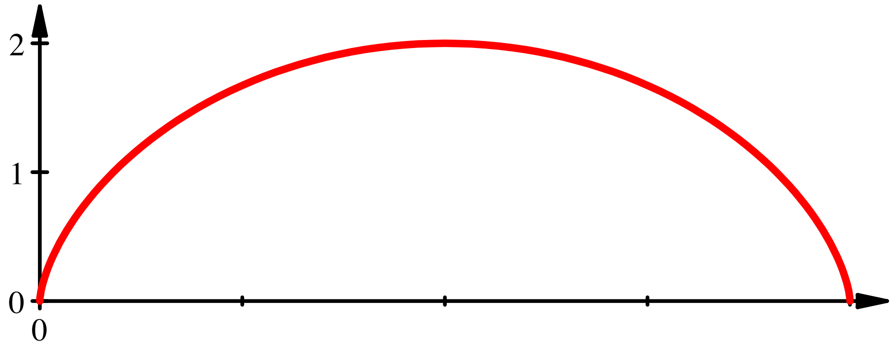
Die rote Kurve beschreibt den Weg eines Punktes bei einer vollen Umdrehung des Rades. Ihre Länge entspricht daher dem Umfang des Rades. — Stimmt das?

Bearbeitung

Stimmt nicht. In der Überlegung wurde die Vorwärtsbewegung des Rades außer Acht gelassen.

Bemerkungen

Die Kurve heißt *Zykloide*. Wenn wir mit dem Kreisradius 1 arbeiten, ist die abgerollte horizontale Strecke 2π; dies ist der Kreisumfang. Die Zykloide ist offensichtlich länger.



Zykloide

Zur Berechnung der Zykloidenlänge s gehen wir aus von der Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{bmatrix} \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$

Damit wird:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

$$\left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = \sqrt{(1-\cos(t))^2 + \sin^2(t)} = \sqrt{2 - 2\cos(t)}$$

$$s = \int_0^{2\pi} \left|\dot{\vec{x}}(t)\right| \mathrm{d}t = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(t)}\,\mathrm{d}t$$

Nun verwenden wir die Substitution $\vartheta = \frac{t}{2}$ und erhalten:

$$s = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos(2\vartheta)}\,2\,\mathrm{d}\vartheta = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\left(2\cos^2(\vartheta)-1\right)}\,\mathrm{d}\vartheta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos^2(\vartheta)}\,\mathrm{d}\vartheta = 2\sqrt{2}\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos^2(\vartheta)}\,\mathrm{d}\vartheta = 4\underbrace{\int_0^{\pi}\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta}_{=2} = 8$$

Die Zykloidenlänge ist größer als der Kreisumfang. Überraschenderweise ist es eine ganze Zahl. Der Kreisumfang ist eine irrationale Zahl.