

Hans Walser, [20141010]

## Kreisspiegelung

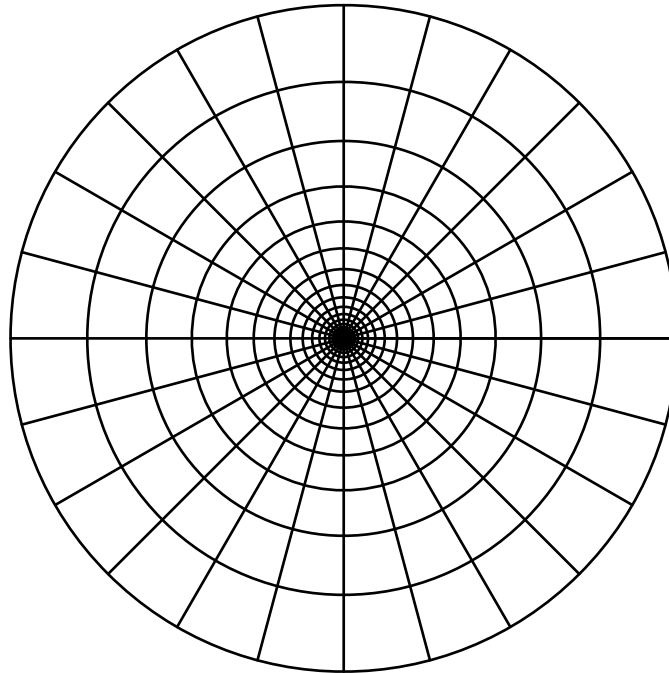
### 1 Worum geht es?

Es werden zwei verschiedene Konzepte zur Kreisspiegelung untersucht.

### 2 Die klassische Kreisspiegelung

#### 2.1 Das Raster

Wir arbeiten mit dem Raster der Abbildung 1.



**Abb. 1: Arbeitsraster**

Dieser Raster entsteht in GeoGebra durch folgende Eingabezeilen:

```
Folge[Kurve[exp(a)*cos(b), exp(a)*sin(b), a, -π, π], b, 0, 2*π, π/12]
```

```
Folge[Kurve[exp(a)*cos(b), exp(a)*sin(b), b, -π, π], a, -π, π, π/12]
```

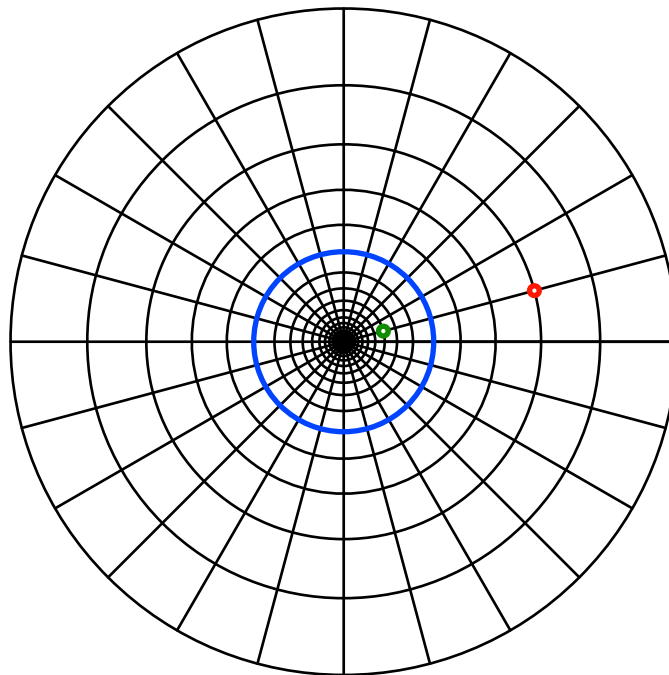
Die erste Eingabezeile gibt die radialen Geraden, die zweite Eingabezeile die Kreise mit exponentiell wachsenden Radien.

Die Karos des Rasters sind annähernd Quadrate.

#### 2.2 Spiegelung eines Punktes

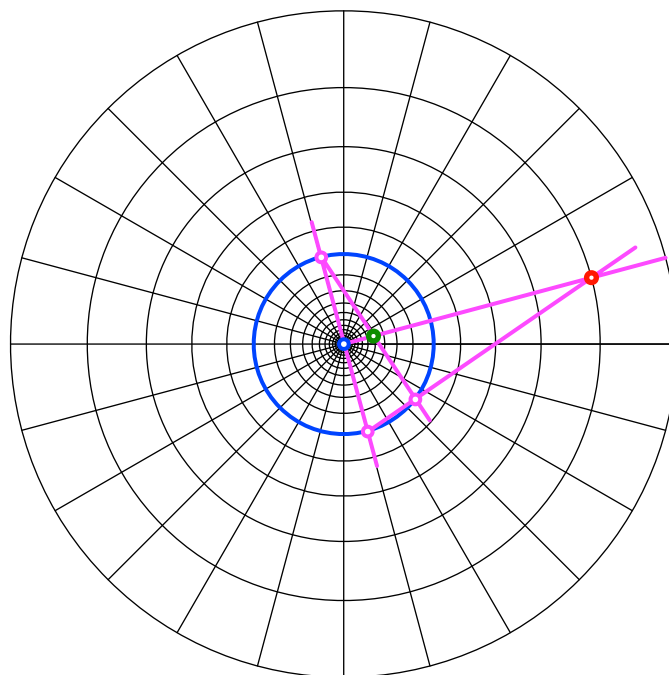
Nun wählen wir einen der Kreise als Spiegelkreis (in der Abbildung 2 blau) und spiegeln einen Punkt durch Abzählen der Karos. Dabei spielt es keine Rolle, ob wir von innen nach außen spiegeln oder umgekehrt. Die Grundregel des Spiegelns „gleich weit auf die andere Seite“ bezieht sich auf die Anzahl der Karos.

Da der Karoraster gegen das Zentrum des Spiegelkreises „ins Unendliche“ geht kann dieses Spiegelkreiszentrum nicht abgebildet werden. Man behilft sich, indem man einen „unendlich fernen Punkt“ als Spiegelbild des Spiegelkreiszentrums postuliert.



**Abb. 2: Spiegelung eines Punktes**

Die Abbildung 3 zeigt, wie das konstruktiv mit Zirkel und Lineal oder mit dynamischer Geometrie-Software gemacht werden kann. Dazu benötigen wir lediglich den Spiegelkreis und seinen Mittelpunkt. Das Arbeitsraster benötigen wir nicht mehr.

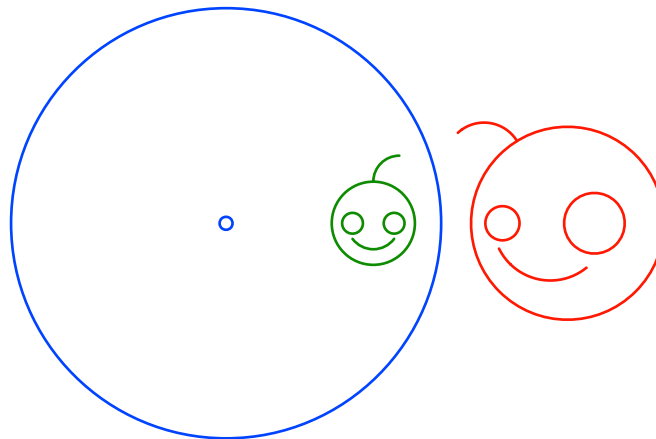


**Abb. 3: Konstruktives Vorgehen**

### 2.3 Bild des Smiley

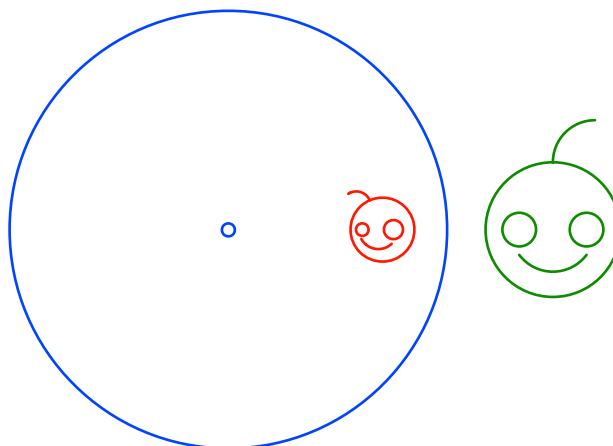
In der Abbildung 4 ist das grüne Gesicht von innen nach außen gespiegelt worden. Wir stellen fest: Die Kreisspiegelung ist kreistreu insofern als ein Kreis als Gesamtes auf einen Kreis abgebildet wird. Allerdings gibt es Binnenverzerrungen, und daher ist die Bildfigur verzerrt. Das grüne Gesicht ist bis auf die Locke symmetrisch, das rote nicht. Wir haben emotional Probleme, von einer „Spiegelung“ zu reden.

Die Locke hat sich gewendet. Wir haben eine Orientierungsänderung.



**Abb. 4: Bild des Smiley**

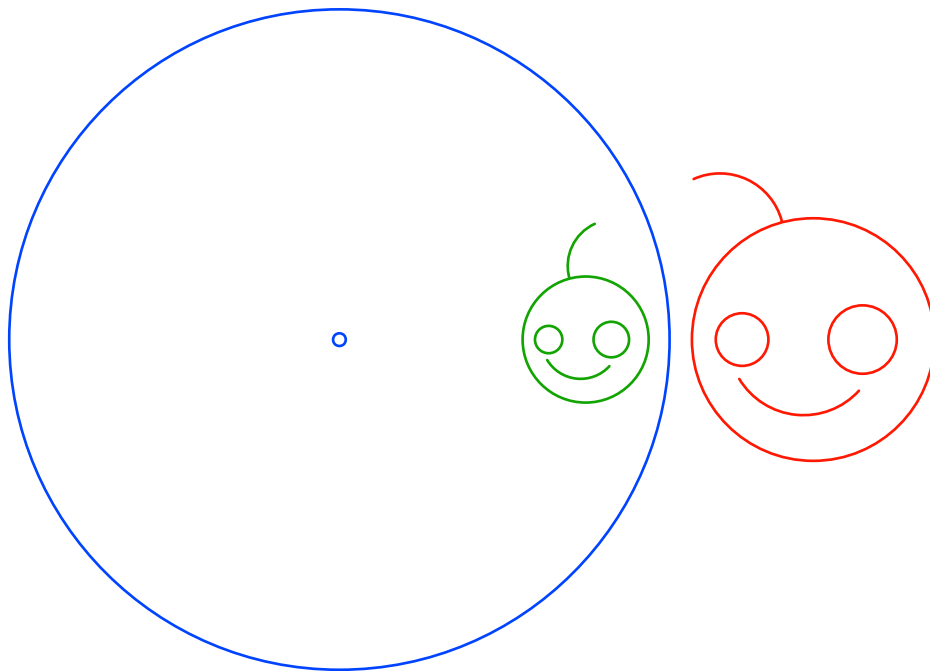
In der Abbildung 5 ist das grüne Gesicht von außen nach innen gespiegelt worden.



**Abb. 5: Von außen nach innen**

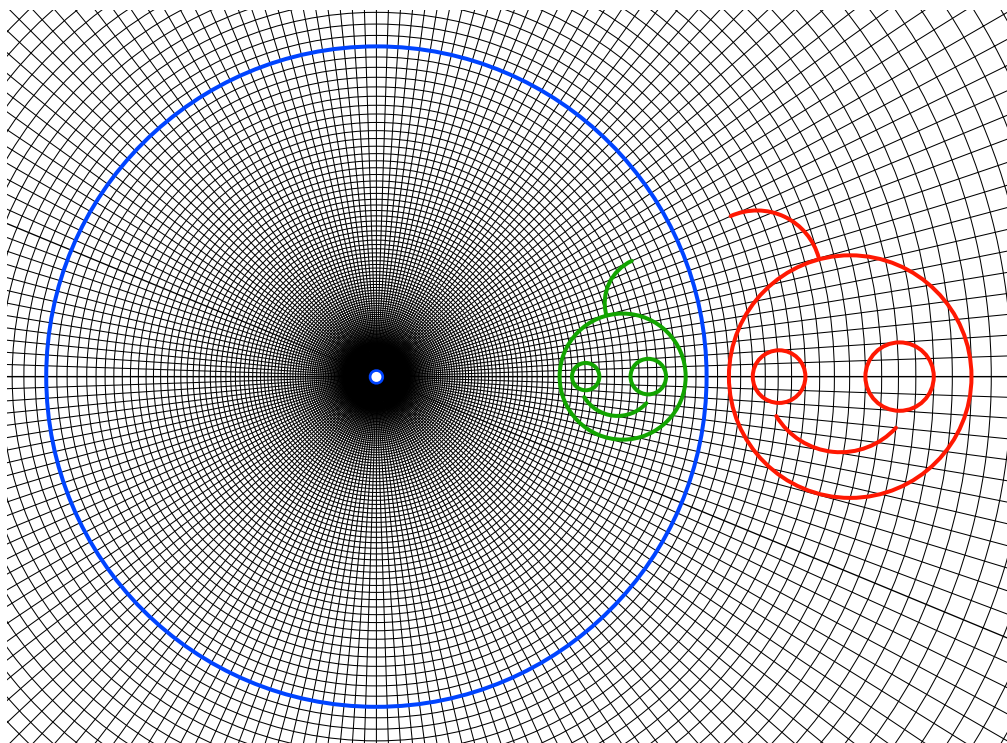
In der Abbildung 6 ist das grüne Gesicht so verzerrt gezeichnet, dass die Verzerrung im Prinzip erhalten bleibt. Die Situation deckt sich mit unserer Vorstellung von „Spiegelung“.

Abgesehen von der Locke ist es eine zentrische Streckung, also eine Ähnlichkeitsabbildung.



**Abb. 6: Verzerrungstreue Abbildung**

Um das zu erhalten, wurde mit „Abzählen der Karos“ gearbeitet (Abb. 7). Das grüne Gesicht wurde bereits im Karoraster gezeichnet.

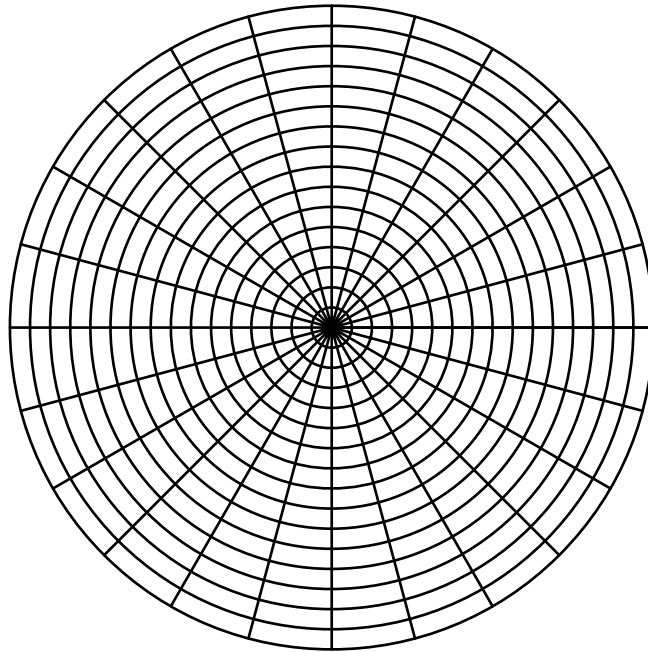


**Abb. 7: Abzählen der Karos**

### 3 Neuer Raster

#### 3.1 Das Raster

Wir arbeiten nun mit dem Raster der Abbildung 8.



**Abb. 8: Neues Raster**

Die Radien der Kreise wachsen gleichmäßig. Die Karos des Rasters sind nun aber nicht mehr angenähert Quadrate.

Das Raster entsteht in GeoGebra durch folgende Eingabezeilen:

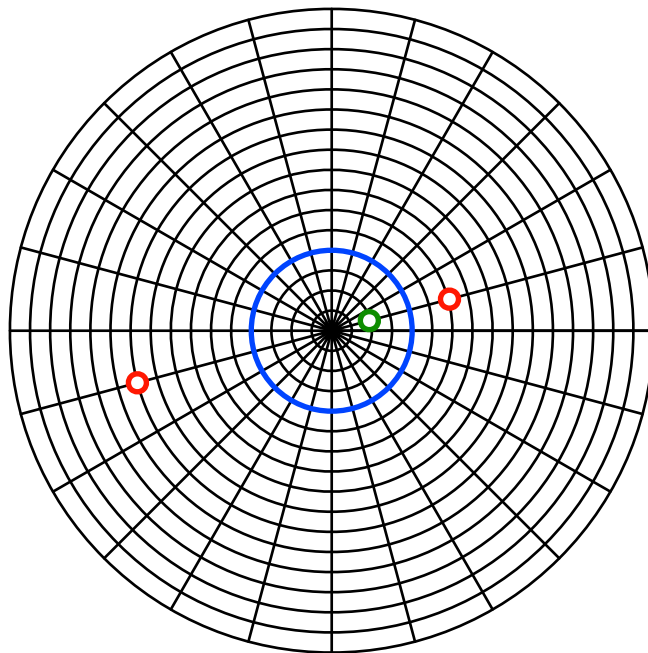
```
Folge[Kurve[a*cos(b), a*sin(b), a, 0, 2], b, 0, 2*pi, pi/12]
```

```
Folge[Kurve[a*cos(b), a*sin(b), b, -pi, pi], a, 0, 2, 1/8]
```

Die erste Eingabezeile gibt die radialen Geraden, die zweite Eingabezeile die Kreise mit gleichmäßig zunehmenden Radien.

#### 3.2 Spiegelung eines Punktes

Nun wählen wir wieder einen Spiegelkreis (blau) und versuchen einen Punkt im Innern nach außen zu spiegeln indem wir „gleich weit“ auf die andere Seite der Kreislinie gehen. Wir stellen fest, dass es zwei Möglichkeiten gibt (Abb. 9). Wir haben es also nicht mehr mit einer eindeutigen Abbildung im Sinne der Mathematik zu tun. Wehe wenn das der Lehrer sieht!



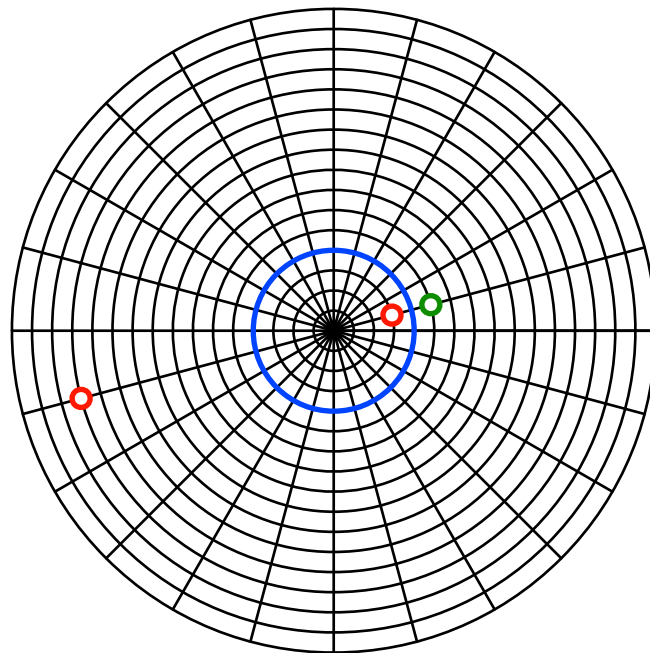
**Abb. 9: Wie kommen wir nach außen?**

Man kann da jetzt ein bisschen philosophieren. In der Schule lernen wir, dass wir auf dem kürzesten Weg über die Straße gehen sollen. Wenn wir entsprechend auf dem kürzesten Weg über den blauen Spiegelkreis gehen wollen, ist der rote Punkt rechts der „richtige“. Damit ist die Abbildung von innen nach außen eindeutig definiert.

Mit einer Ausnahme. Für das Zentrum des Spiegelkreises kommen alle Punkte auf einem Kreis mit dem doppelten Radius des Spiegelkreises als Bildpunkte in Frage. Das heißt umgekehrt, dass die Punkte auf diesem doppelt so großen Kreis auf das Spiegelkreiszentrum abgebildet werden können.

Der rote Punkt links gehört zur Bummelvariante „auf dem längsten Weg“.

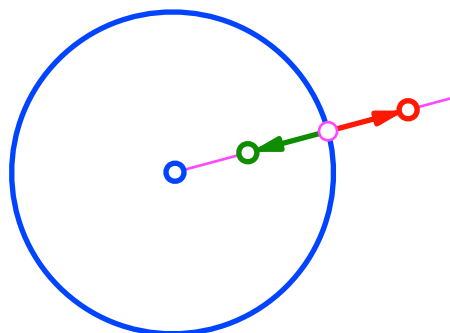
Die Abbildung 10 zeigt ein Beispiel mit einem Startpunkt außerhalb des Kreises. Ein Bildpunkt ist im Innern des Kreises. Ein weiterer Bildpunkt ist außerhalb.



**Abb. 10: Startpunkt außerhalb**

Wenn der Startpunkt mehr als der Durchmesser des blauen Spiegelkreises von diesem entfernt ist, sind sogar beide Bildpunkte außerhalb.

Die Konstruktion des Spiegelpunktes kann natürlich auch ohne Raster durchgeführt werden (Abb. 11).



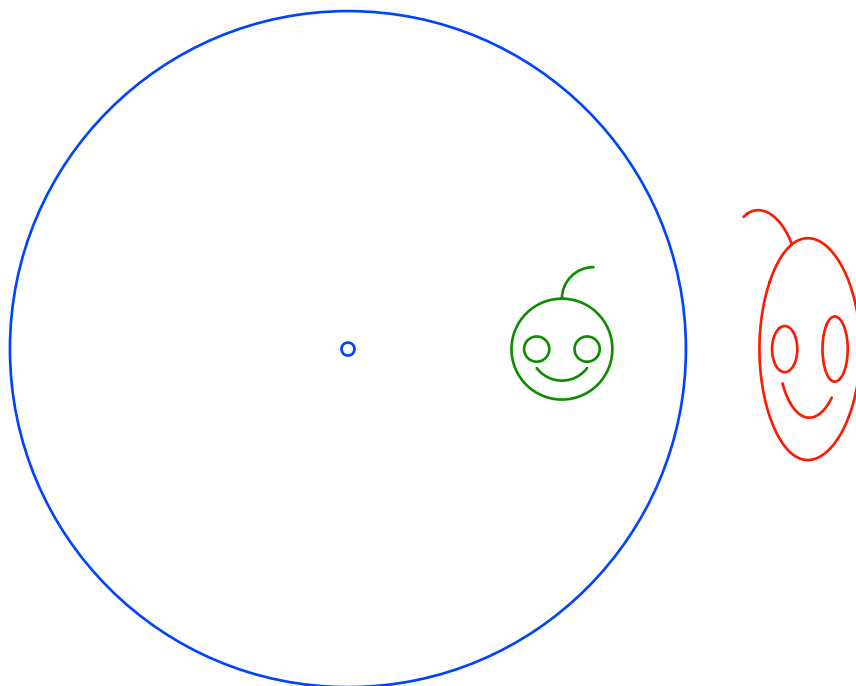
**Abb. 11: Konstruktion ohne Raster**

### 3.3 Bild des Smiley

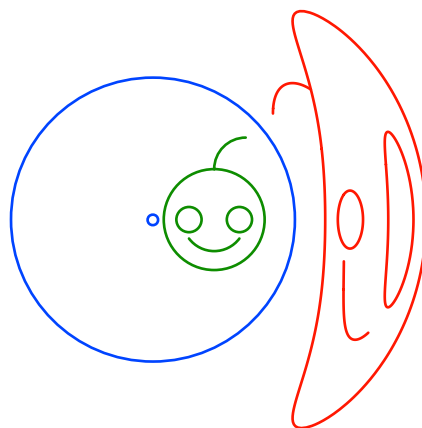
Im Folgenden einige Bilder des Smiley.

Die Abbildung 13 zeigt eine Spiegelung von innen nach außen. Die Bilder der Kreise sehen aus wie Ellipsen, sind aber keine. Dies wird durch die Abbildung 13 illustriert. Die Bilder der Kreise sind eher bananenförmig.

Die rote Locke ist spiegelbildlich zur grünen Locke.



**Abb. 12: Von innen nach außen**

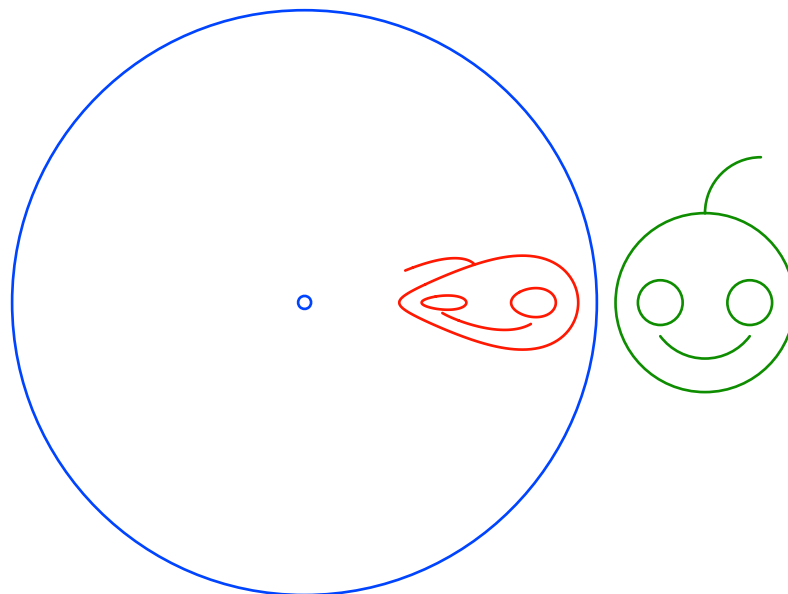


**Abb. 13: Das Bild ist keine Ellipse**

Die Abbildung 14 zeigt den Weg von außen nach innen. Die Bilder der Kreise werden eiförmig, mit der „Spitze“ gegen den Mittelpunkt des Spiegelkreises.

Die rote Locke ist spiegelbildlich zur grünen Locke.

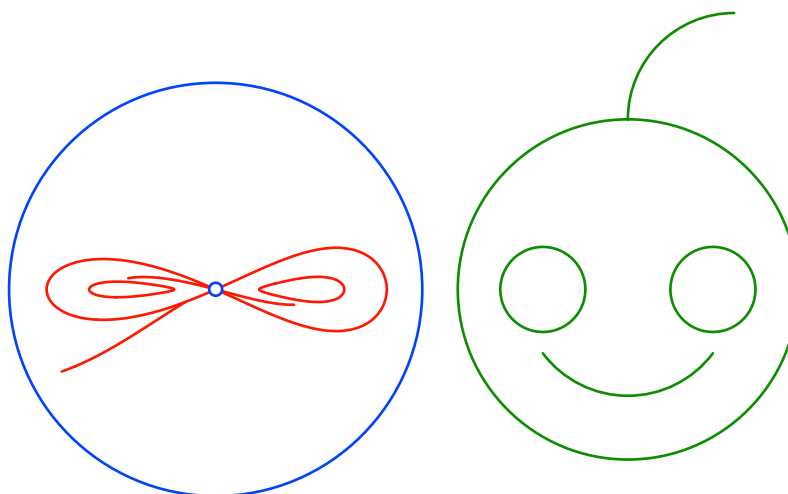




**Abb. 14: Von außen nach innen**

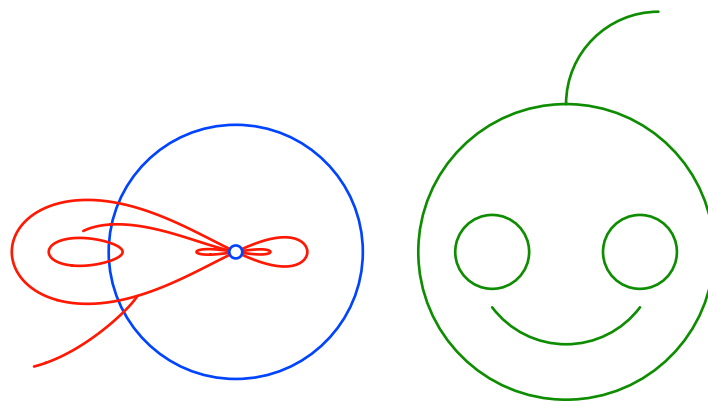
Im Beispiel der Abbildung 15 überstreicht der grüne Urbildkreis den Kreis mit dem doppelten Radius des Spiegelkreises. Es werden daher mehrere Punkte ins Zentrum des Spiegelkreises abgebildet. Der Umrisskreis des grünen Kopfes wird zu einer liegenden Achs.

Über die rote Locke kann man sich Gedanken machen.



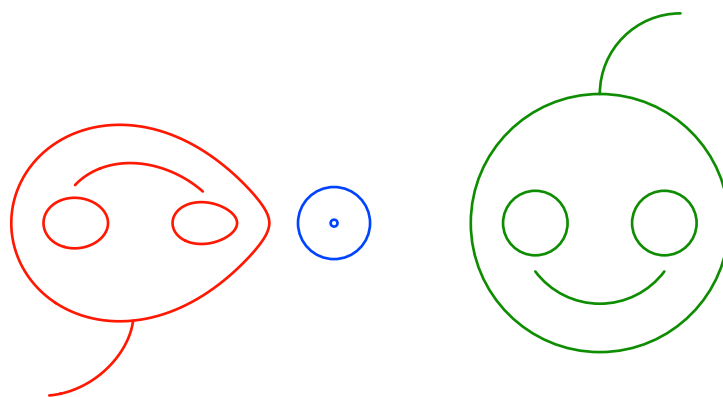
**Abb. 15: Was ist hier los?**

In der Abbildung 16 wird kopfüber die Flucht nach links angetreten.



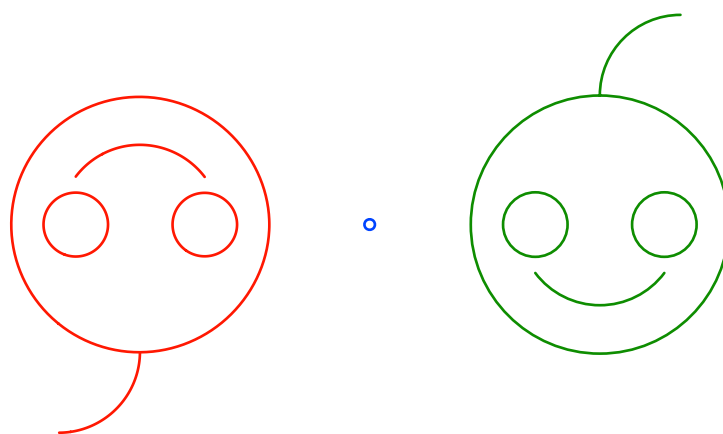
**Abb. 16: Flucht nach links**

Im Beispiel der Abbildung 17 bleibt die Orientierung erhalten.



**Abb. 17: Orientierungserhaltend**

Wenn der Spiegelkreis relativ zum Urbild zu einem Punkt zusammenschrumpft, ergibt sich eine Punktspiegelung (Abb. 18).



**Abb. 18: Der Spiegelkreis schrumpft zu einem Punkt**