Hans Walser, [20170423]

Kreisschar

1 Worum geht es?

Es wird eine Schar von konzentrischen Kreisen gezeigt, welche sowohl in regelmäßigen Vielecken wie auch in der üblichen Kugelparametrisierung erscheint.

2 Vielecke

2.1 Diagonalen

Die Abbildung 1 zeigt ein regelmäßiges 36-Eck mit sämtlichen Diagonalen.

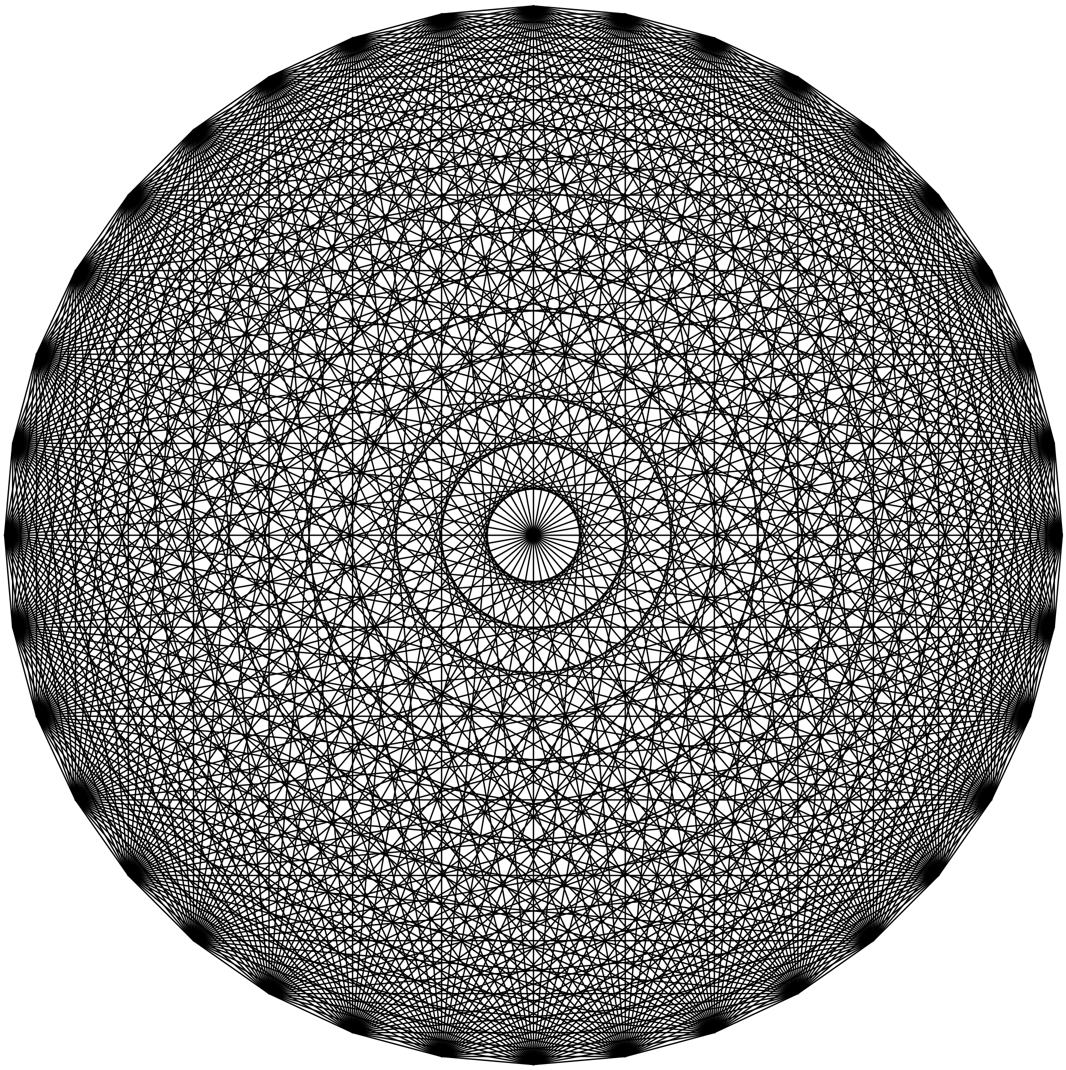

Abb. 1: 36-Eck mit Diagonalen

Wir „sehen“ Kreise. Wie viele Kreise sind es? Welches sind ihre Radien?
Über Diagonalenschnittpunkt in regelmäßigen Vielecken siehe [2] .

2.2 Diagonalen und Kreise

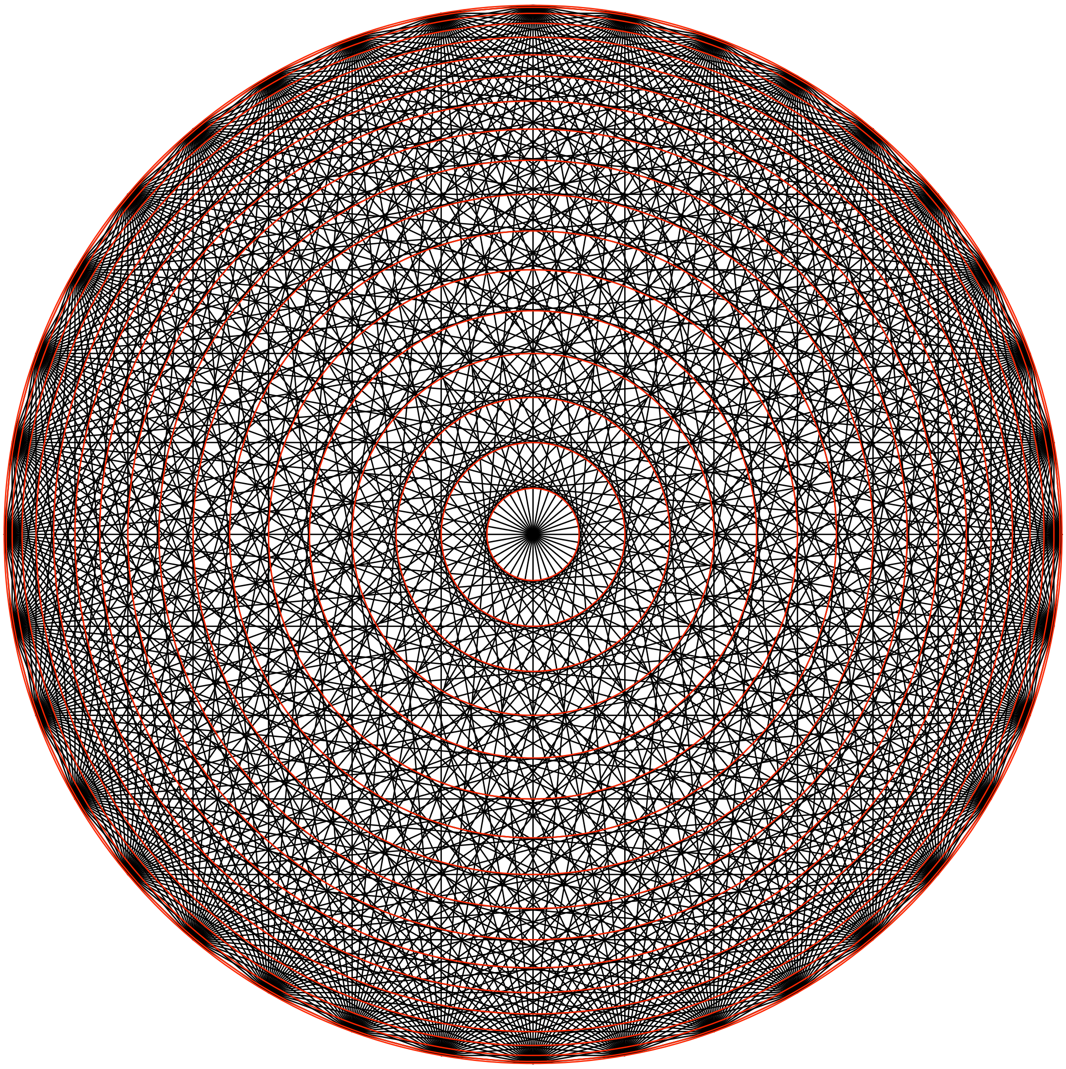

Abb. 2: Rote Kreise

In der Abbildung 2 sind die Kreise tatsächlich rot eingezeichnet.

2.3 Nur Kreise

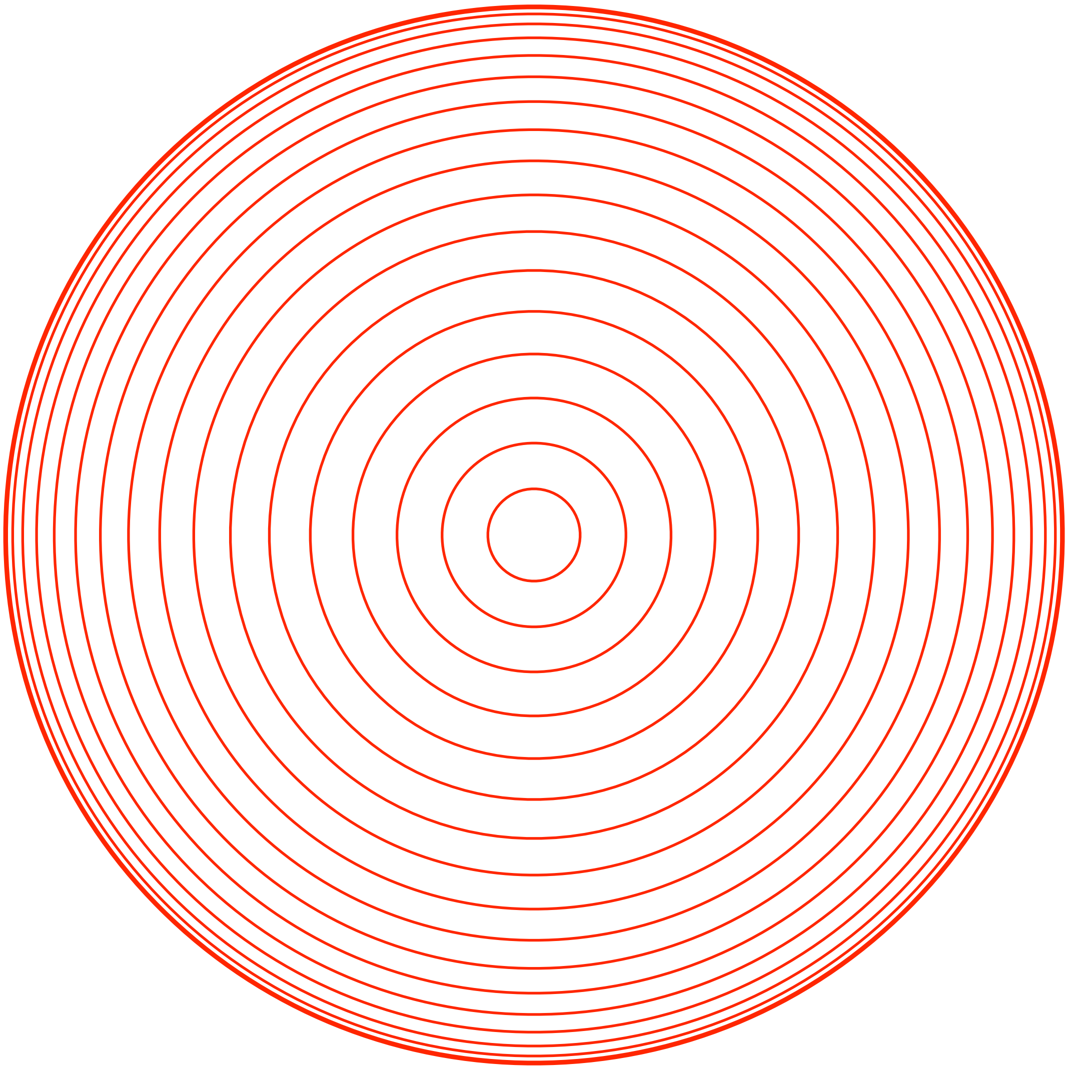

Abb. 3: Kreise

Die Abbildung 3 enthält nur die roten Kreise.
Sehen wir da eine räumliche Figur?

3 Kugel

3.1 Parameterdarstellung

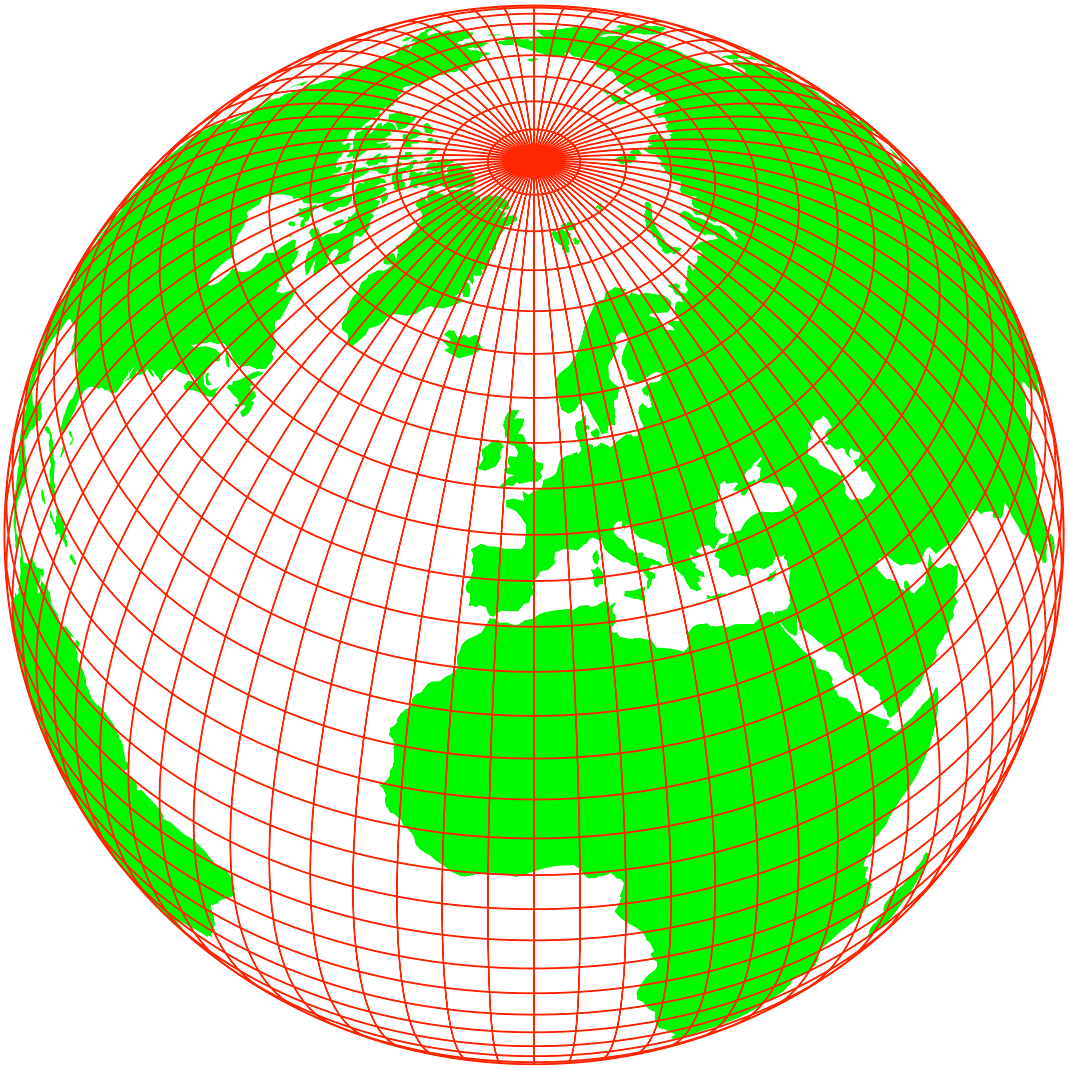

Abb. 4: Kugel

Die Kugel der Abbildung 4 ist mit der Maschenweite 5° parametrisiert. Geodaten aus Kartenprojektionen [1].

3.2 Blick auf den Nordpol

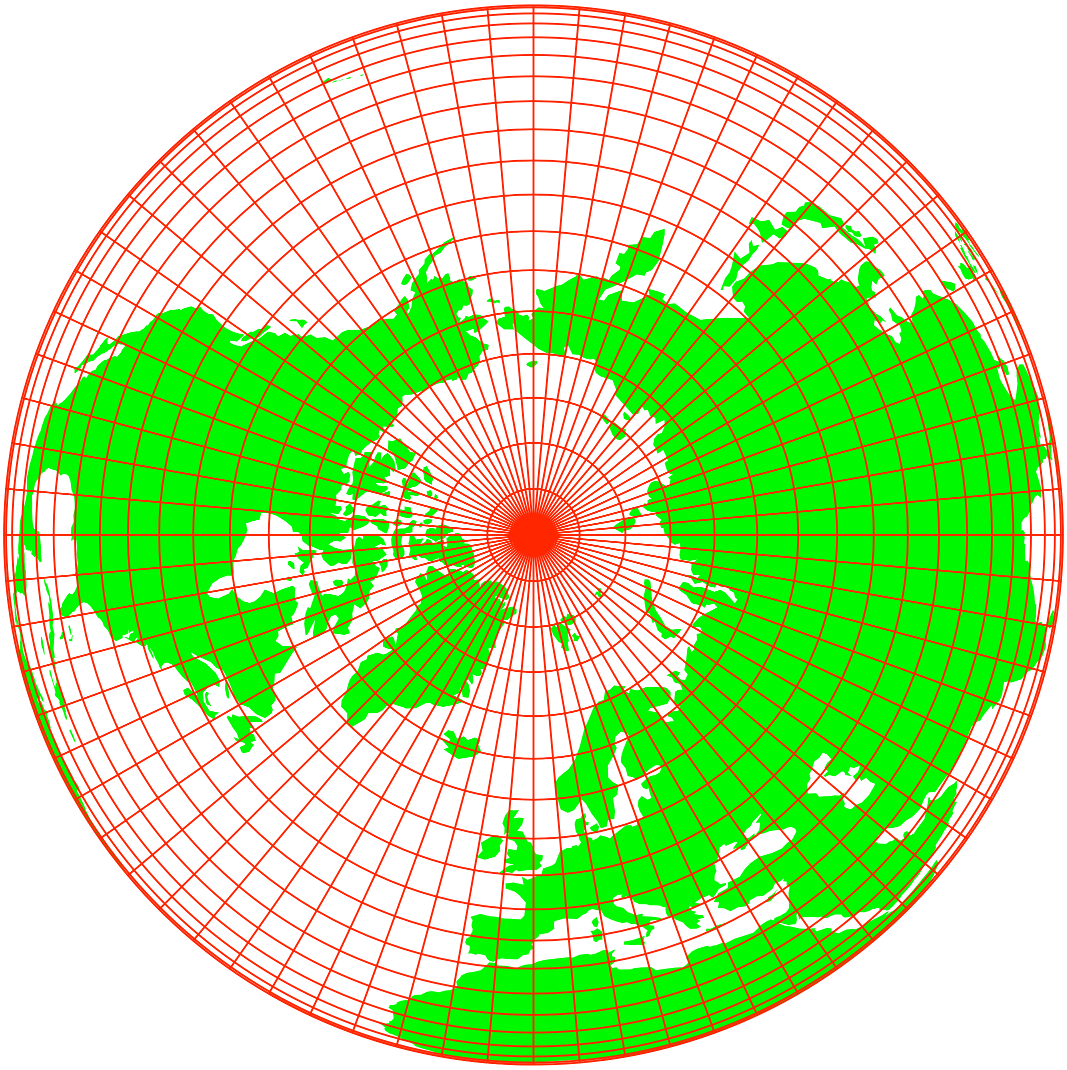

Abb. 5: Blick auf den Nordpol

Die Abbildung 5 zeigt dasselbe mit Blick auf den Nordpol.
Wir erkennen dieselben Kreise wie in den Abbildungen 1 bis 3.

4 Hintergrund

4.1 Regelmäßige Vielecke

4.1.1 Gerade Eckenzahl

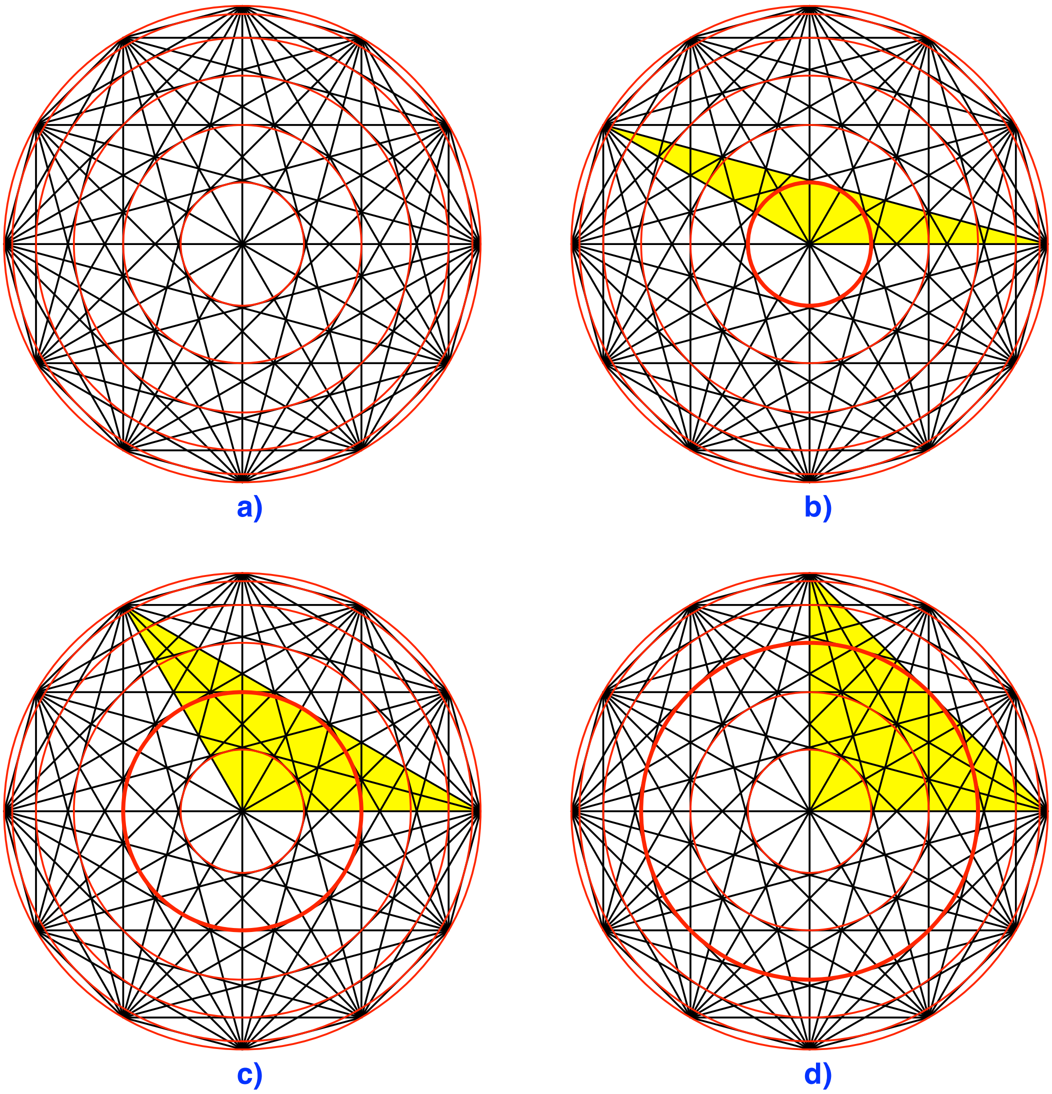

Abb. 6: Berechnung der Radien

Wir arbeiten exemplarisch im regelmäßigen Zwölfeck (Abb. 6a). Die Mittelpunktdiagonalen schneiden sich unter Winkeln von 30°. Zwei benachbarte Diagonalen welche vom selben Eckpunkt ausgehen schließen einen Winkel von 15° ein (*Fächerwinkel*). Den Umkreisradius setzen wir 1.

Der Radius r_1 des innersten roten Kreises ist die Basishöhe des in der Abbildung 6b gelb eingezeichneten gleichschenkligen Dreiecks. Dieses hat die Schenkellänge 1 und die Basiswinkel 15°. Somit erhalten wir:

$$r_1 = \sin(15°) \approx 0.2588 \tag{1}$$

Für den Radius r_2 des zweitinnersten Kreises arbeiten wir analog mit dem in der Abbildung 6c eingezeichneten Dreieck:

$$r_2 = \sin(30°) = \sin(2 \cdot 15°) = \tfrac{1}{2} \tag{2}$$

Für den Radius r_3 ergibt sich (Abb. 6d):

$$r_3 = \sin(45°) = \sin(3 \cdot 15°) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \tag{3}$$

Wir sehen die allgemeine Gesetzmäßigkeit:

$$r_j = \sin(j \cdot 15°) = \sin\left(j \tfrac{180°}{12}\right); \quad j \in \{1,\ldots,6\} \tag{4}$$

Die Abbildung 7 zeigt das Spektrum der Radien unter der Sinuskurve.

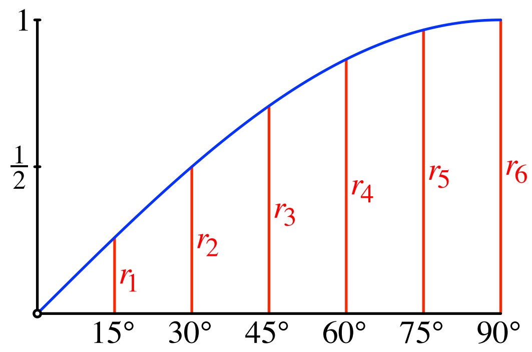

Abb. 7: Spektrum

Die Formel (4) lässt sich für ein Vieleck gerader Eckenzahl n verallgemeinern zu:

$$r_j = \sin\left(j \tfrac{180°}{n}\right); \quad j \in \left\{1,\ldots,\tfrac{n}{2}\right\} \tag{5}$$

4.1.2 Ungerade Eckenzahl

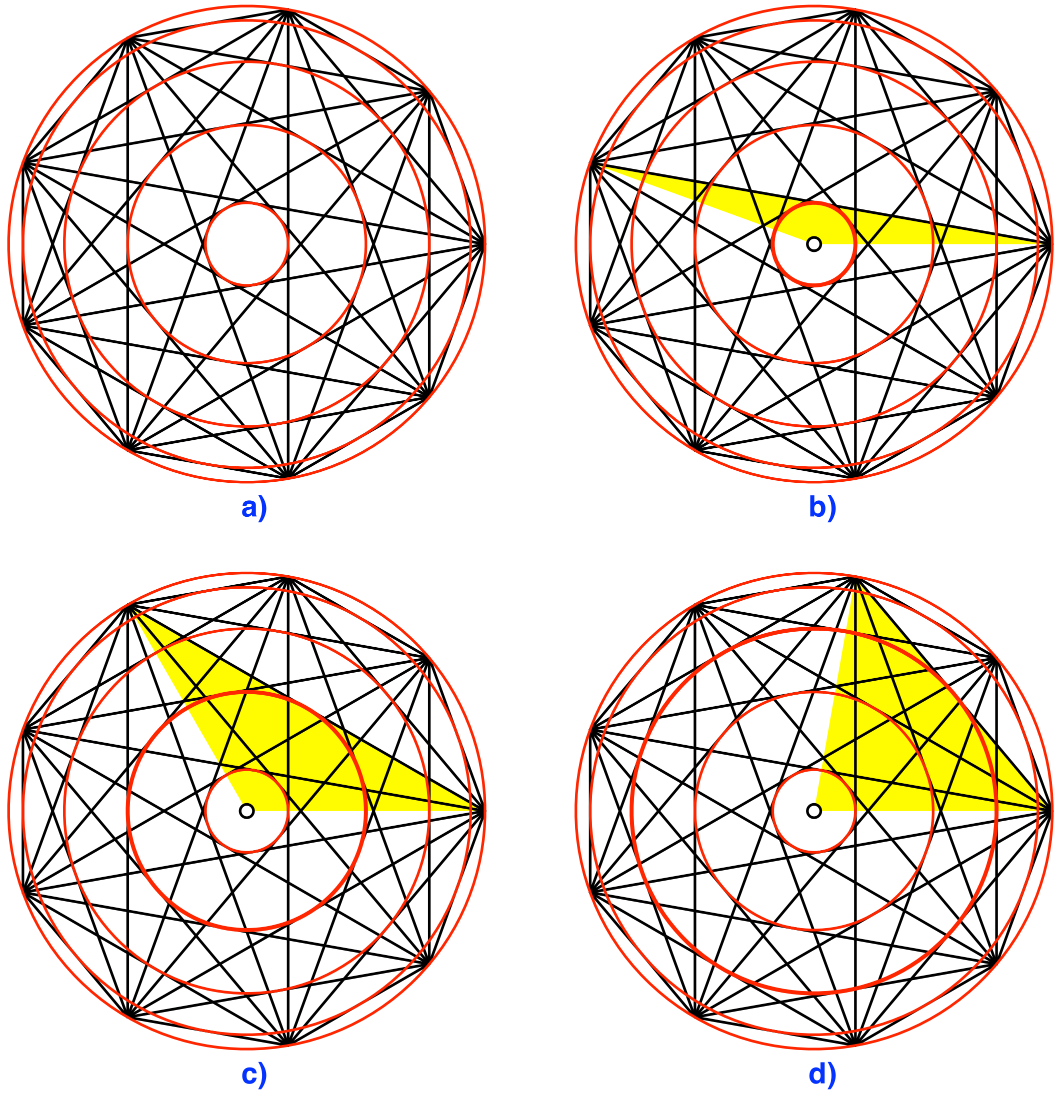

Abb. 8: Regelmäßiges Neuneck

Wir arbeiten exemplarisch im regelmäßigen Neuneck (Abb. 8a). Wir haben keine Mittelpunktdiagonalen, sondern ein „Loch“ in der Mitte. Die gelben gleichschenkligen Dreiecke haben der Reihe nach die Basiswinkel 10°, 30°, 50°. Wir haben eine „versetzte“ arithmetische Folge mit dem Versatz 10°.

Für die Radien der Kreise erhalten wir:

$$r_0 = \sin(10°), \quad r_1 = \sin(30°), \quad r_2 = \sin(50°) \tag{6}$$

Wir erkennen die Formel:

$$r_j = \sin\left(10° + j \cdot 20°\right), \quad j \in \{0,...,4\} \tag{7}$$

Allgemein gilt für ein Vieleck ungerader Eckenzahl n:

$$r_j = \sin\left(\tfrac{180°}{2n} + j\tfrac{180°}{n}\right); \quad j \in \left\{0,...,\tfrac{n-1}{2}\right\} \tag{8}$$

Die Formeln (5) und (8) lassen sich zusammenfassen zu:

$$r_j = \sin\left(\left(n \bmod 2\right)\tfrac{180°}{2n} + j\tfrac{180°}{n}\right); \quad j \in \left\{0,...,\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor\right\} \tag{9}$$

4.2 Kugelparametrisierung

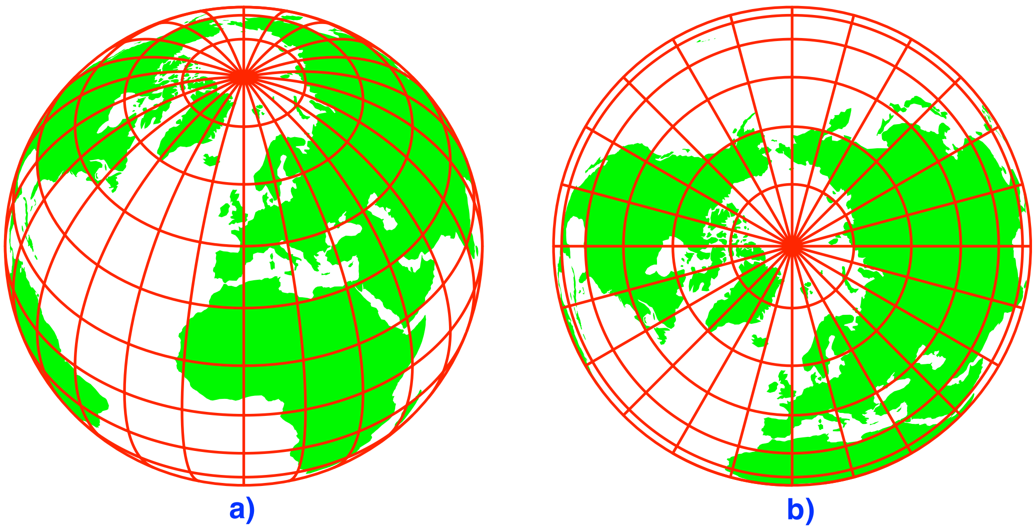

Abb. 9: Kugelparametrisierung

Die Kugelparametrisierung der Abbildung 9 arbeitet mit einem 15°-Raster. Ein Meridian wird also durch die Breitenkreise in 12 Teile unterteilt.

Den Kugelradius setzen wir 1.

Wir berechnen nun die Radien der Breitenkreise (Abb. 9b).

Der erste Breitenkreis nach dem Nordpol gehört zur geografischen Breite 75°N. Seine Poldistanz ist daher 15°. Die Poldistanz ist der Winkelabstand des Breitenkreises vom Nordpol. Poldistanz und geografische Breite ergänzen sich auf 90°.

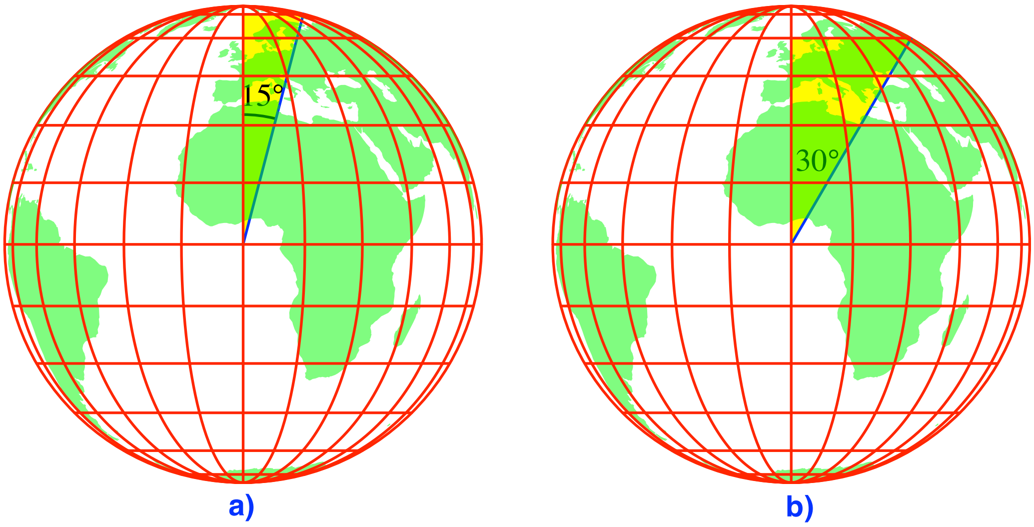

Abb. 10: Breitenkreisradien

Gemäß der Abbildung 10a erhalten wir für den Radius r_1 des ersten Breitenkreises nach dem Nordpol:

$$r_1 = \sin(15°) \tag{10}$$

Analog erhalten wir für den zweiten Breitenkreis nach dem Nordpol (Abb. 10b) den Radius:

$$r_2 = \sin(30°) = \sin(2 \cdot 15°) \tag{11}$$

Allgemein ist:

$$r_j = \sin(j \cdot 15°) = \sin\left(j \tfrac{180°}{12}\right); \quad j \in \{1,...,6\} \tag{12}$$

Die Formel (12) ist identisch mit der Formel (4). Die Abbildung 11 zeigt die Überlagerung der Abbildungen 6a (Diagonalen im Zwölfeck) und 9b (Blick auf den Nordpol). Es wird genau jeder zweite Meridian durch eine Diagonale des Zwölfecks abgedeckt.

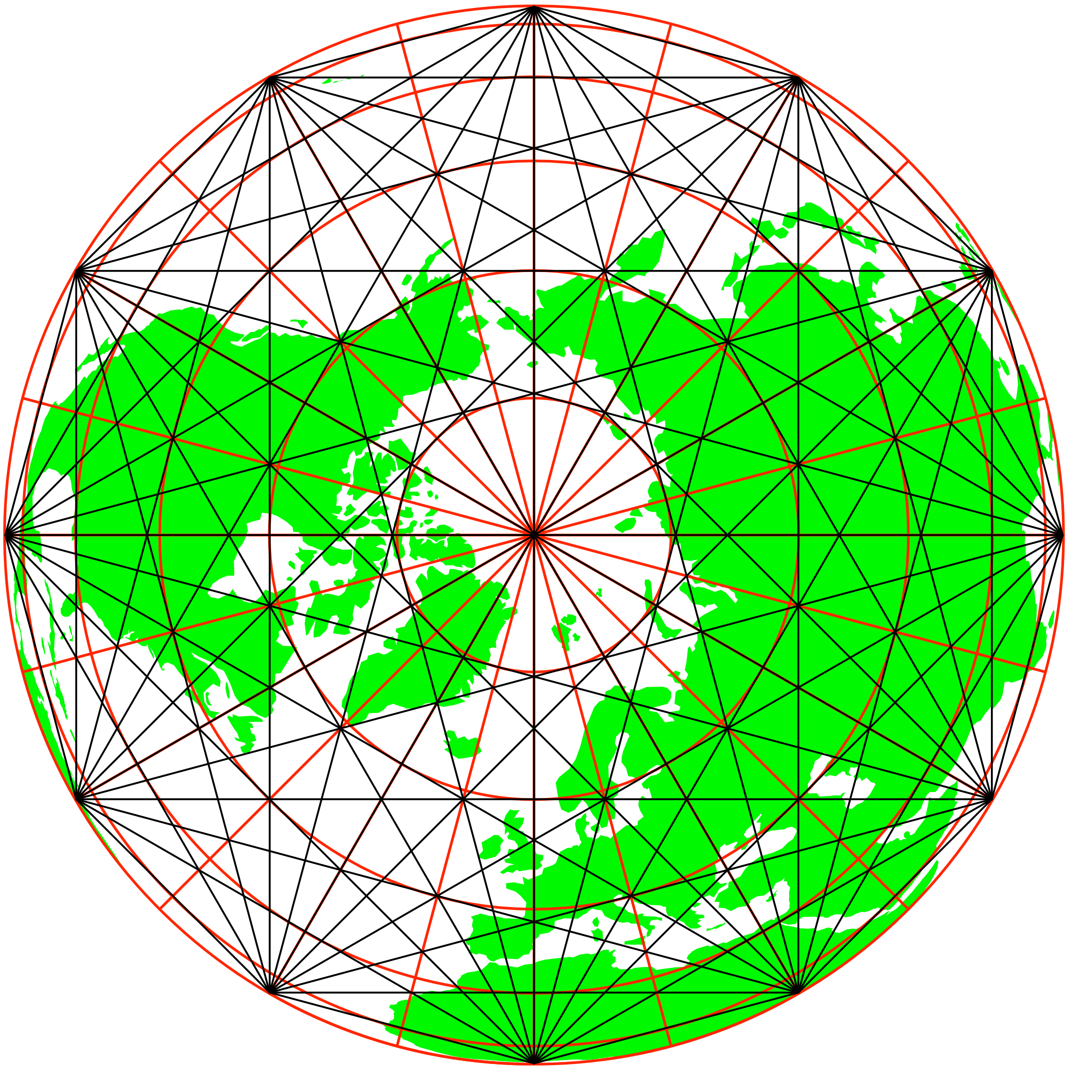

Abb. 11: Überlagerung

Die Abbildung 12 zeigt eine grafische Variante.

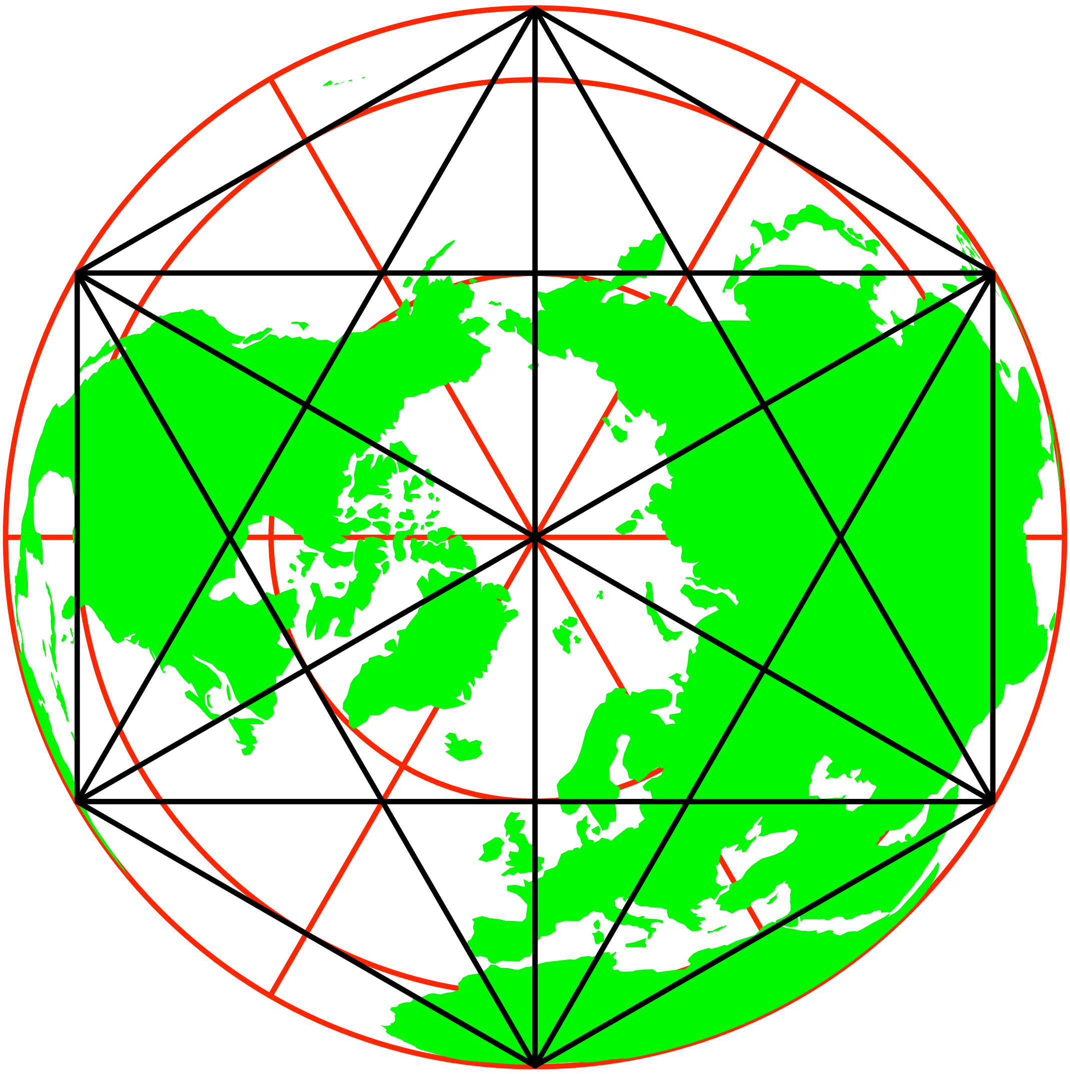

Abb. 12: Variante

Der Fall „ungerade“ kommt in der Kugelparametrisierung nicht vor. Warum nicht?

Websites

[1] ETH Zürich. Institut für Kartografie und Geoinformation. Kartenprojektionen (24.04.2017):
http://swai.ethz.ch/swaie/MapProjector/MapProjector.de.html

[2] Hans Walser: Digonalenschnittpunkte in regelmäßigen Vielecken (24.04.2017):
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/D/Diagonalenschnittpunkte/Diagonalenschnittpunkte.htm