Hans Walser, [20140507]

Kreisfunktionen

1 Worum geht es?

Es werden Integration und Ableitung der Kosinus- und der Sinusfunktion besprochen.

2 Definition der Kreisfunktionen

Wir verwenden die üblichen Definitionen im Einheitskreis (Abb. 1).

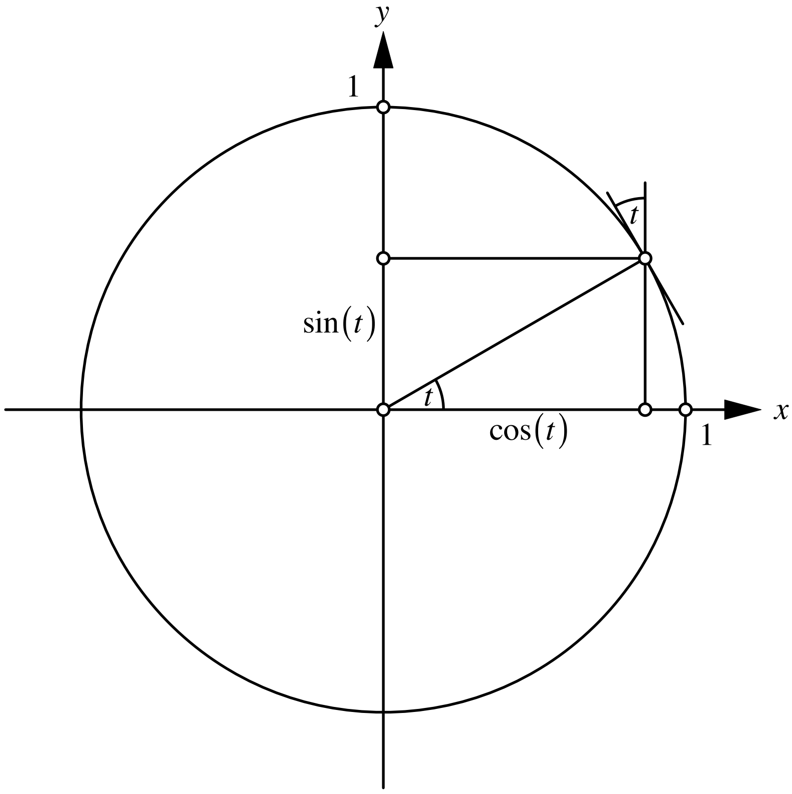

Abb. 1: Definition der Kreisfunktionen

Die Tangente schließt mit der Parallelen zur y-Achse ebenfalls den Winkel t ein.

3 Dispositionen global und lokal

Die Abbildung 2 zeigt die Übersicht.

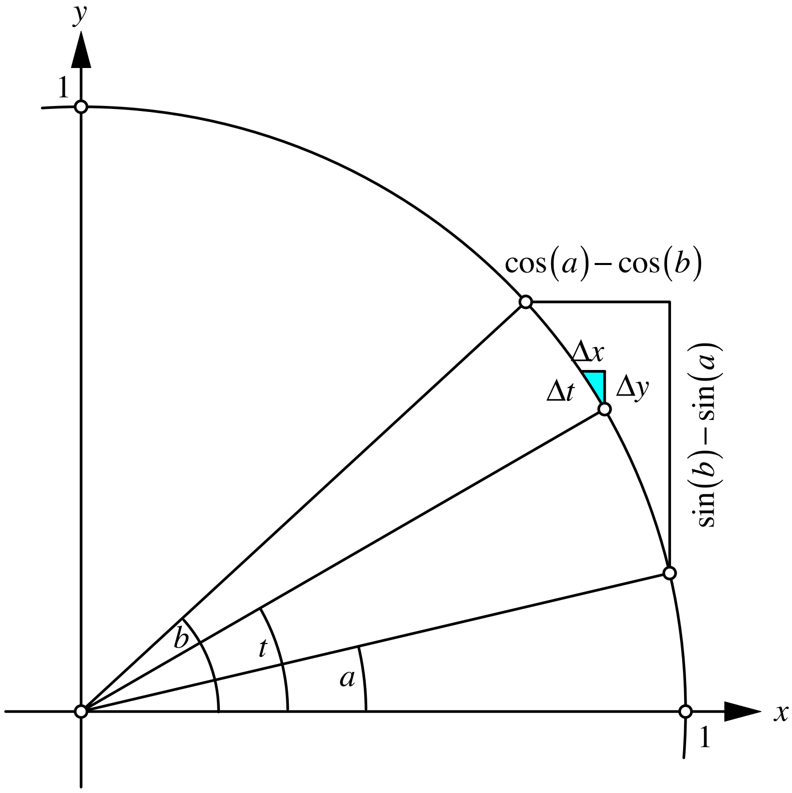

Abb. 2: Übersicht

Die Abbildung 3 zeigt den relevanten lokalen Ausschnitt.

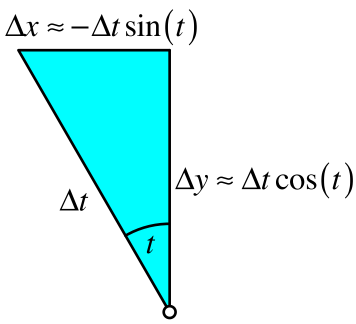

Abb. 3: Lokaler Ausschnitt

Die x-Werte nehmen ab, daher das Minuszeichen.

4 Grenzübergang

Bei $\Delta t \to 0$ glätten sich die „$\approx$“-Zeichen.

4.1 Integrative Überlegung

Die integrative Überlegung ist global und summativ.

y-Richtung:

$$\sin(b)-\sin(a)=\sum \Delta y \approx \sum \Delta t \cos(t) \underset{\Delta t \to 0}{\Rightarrow} \int_a^b \cos(t)\,\mathrm{d}t = \sin(b)-\sin(a)$$

Die Sinusfunktion ist also eine Stammfunktion der Kosinusfunktion.

x-Richtung:

$$\underbrace{\cos(b)-\cos(a)}_{\text{negativ}}=\sum \Delta x \approx -\sum \Delta t \sin(t) \underset{\Delta t \to 0}{\Rightarrow} \int_a^b \sin(t)\,\mathrm{d}t = -\cos(b)-\left(-\cos(a)\right)$$

Die negative Kosinusfunktion ist also eine Stammfunktion der Sinusfunktion.

4.2 Differenzielle Überlegung

Die differenzielle Überlegung ist lokal.

y-Richtung:

$$\tfrac{\Delta y}{\Delta t} = \left.\tfrac{\Delta \sin}{\Delta t}\right|_t \approx \cos(t) \underset{\Delta t \to 0}{\Rightarrow} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(t) = \sin'(t) = \cos(t)$$

Die Kosinusfunktion ist die Ableitung der Sinusfunktion.

x-Richtung:

$$\tfrac{\Delta x}{\Delta t} = \left.\tfrac{\Delta \cos}{\Delta t}\right|_t \approx -\sin(t) \underset{\Delta t \to 0}{\Rightarrow} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(t) = \cos'(t) = -\sin(t)$$

Die negative Sinusfunktion ist die Ableitung der Kosinusfunktion.