Hans Walser, [20071228d], [20130922]

# Die Kreisfläche

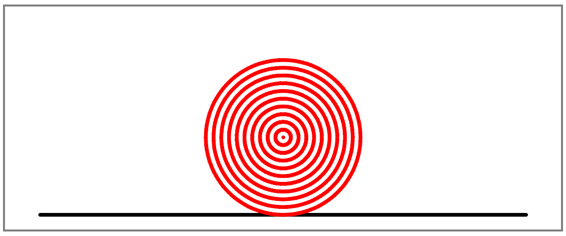
## 1 Worum geht es?

In den folgenden Überlegungen gehen wir davon aus, dass wir die Formel $U_{\odot} = 2\pi r$ für den Kreisumfang kennen, nicht aber die Formel für den Flächeninhalt des Kreises.

Hingegen ist aus Ähnlichkeitsüberlegungen klar, dass diese die Form $A_{\odot} = pr^2$ mit vorläufig unbekanntem Faktor $p$ haben muss.
Es werden drei Beispiele vorgestellt, wie der Faktor $p$ bestimmt werden kann.

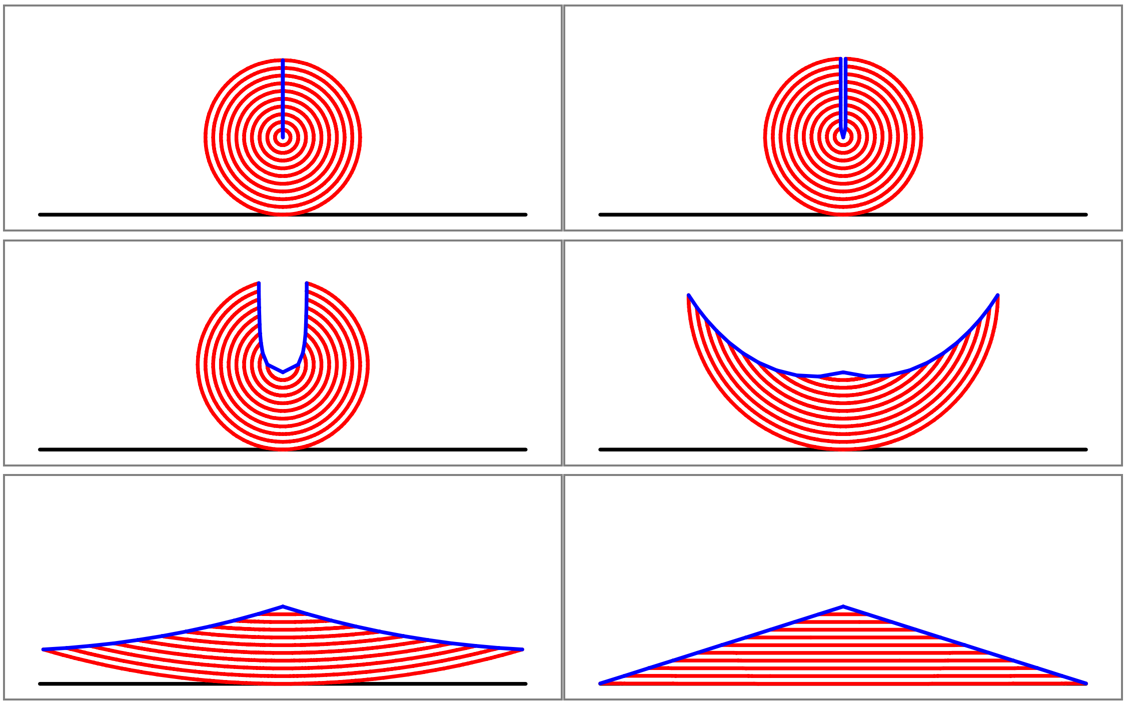
## 2 Aufschneiden von Kreisringen

Wir denken uns einen Kreis, der aus vielen konzentrischen Ringen zusammengesetzt ist. Man kann sich auch den Querschnitt einer Papierrolle denken.



**Der Kreis**

Nun schneiden wir den Kreis von oben her bis in die Mitte ein und lassen die einzelnen Blätter links und rechts auf den Tisch herunterfallen. Die Figurensequenz zeigt das in Zeitlupe.



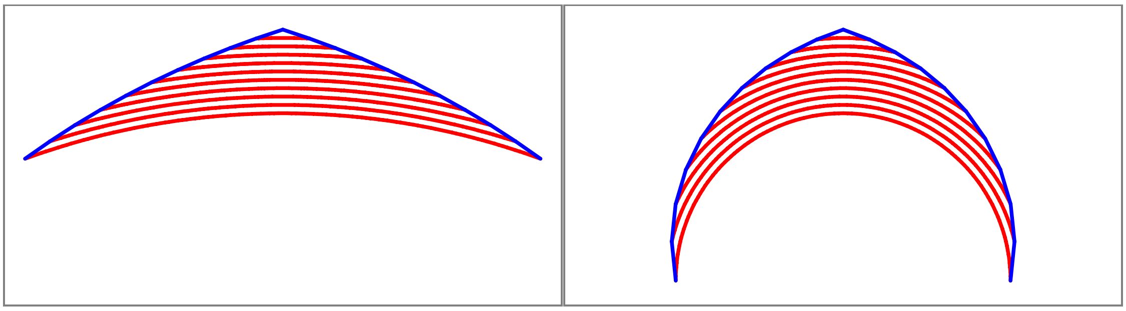
**Die Blätter fallen, fallen wie von weit. (Rilke)**

Wir haben schließlich ein Dreieck; seine Höhe ist der Kreisradius $r$, seine Grundseite der Umfang $2\pi r$ des ursprünglichen Kreises. Für den Flächeninhalt erhalten wir also:

$$A_{\text{Dreieck}} = \tfrac{1}{2} 2\pi r r = \pi r^2$$

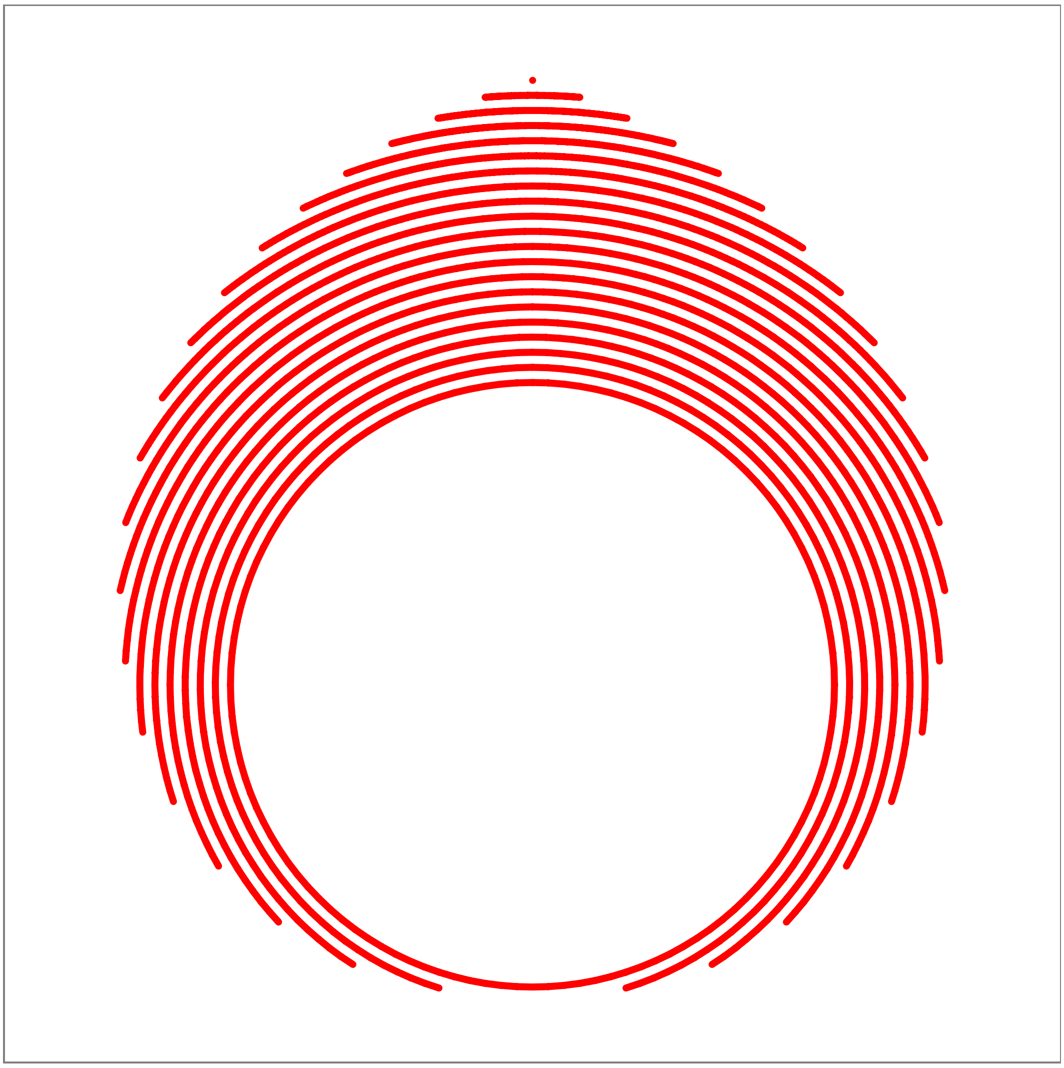
Das ist aber auch der Flächeninhalt des Kreises.

Wir können die Blätter auch noch weiter herunterfallen lassen.



**Überdreht**

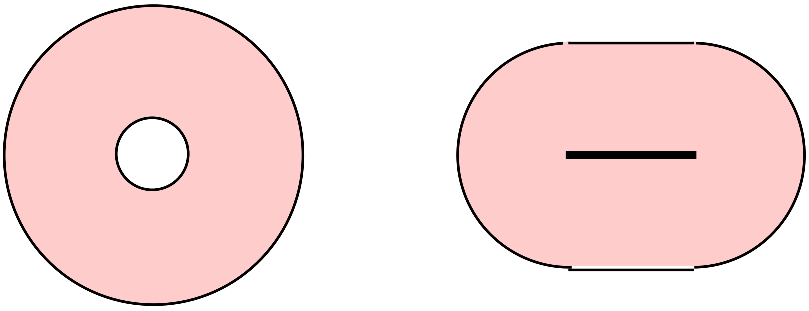
Am Schluss ist die rote Fläche gleich groß wie die weiße Kreisfläche.



**Rotkäppchen**

## 3 Klopapier

Da ich nach P... verreisen wollte, riet man mir, Toilettenpapier mitzunehmen. So packte ich eine Rolle in den Rucksack. Als ich sie vor Ort dringend brauchte und aus dem Rucksack holte, war sie zusammengedrückt (Abbildung rechts).



**Klorolle, neu und zusammengedrückt**

Nun kann folgende Überlegung angestellt werden.

Die Formel für den Kreisumfang kennen wir: $U_{\odot} = 2\pi r$

Die Formel für den Flächeninhalt sieht so aus: $A_{\odot} = pr^2$, mit einem noch unbekannten Faktor $p$.

Für die Klorolle haben wir einen Außenradius $r_a$ und einen Innenradius $r_i$ und damit eine Querschnittsfläche:

$$A_{\text{Querschnitt}} = pr_a^2 - pr_i^2 = p\left(r_a^2 - r_i^2\right)$$

Der Querschnitt der zusammengedrückten Rolle setzt sich aus zwei Halbkreisen mit dem Radius $\left(r_a - r_i\right)$ und einem Rechteck zusammen. Dieses Rechteck hat die Höhe $2\left(r_a - r_i\right)$ und die Länge $\pi r_i$; das ist der halbe Umfang des Innenkreises. Für die Querschnittsfläche der zusammengedrückten Rolle erhalten wir somit:

$$A_{\text{Querschnitt zusammengedrückt}} = \tfrac{2}{2}\, p\left(r_a - r_i\right)^2 + 2\pi r_i\left(r_a - r_i\right)$$

Die beiden Querschnittsflächen sind gleich, also:

$$p\left(r_a^2 - r_i^2\right) = p\left(r_a - r_i\right)^2 + 2\pi r_i\left(r_a - r_i\right)$$

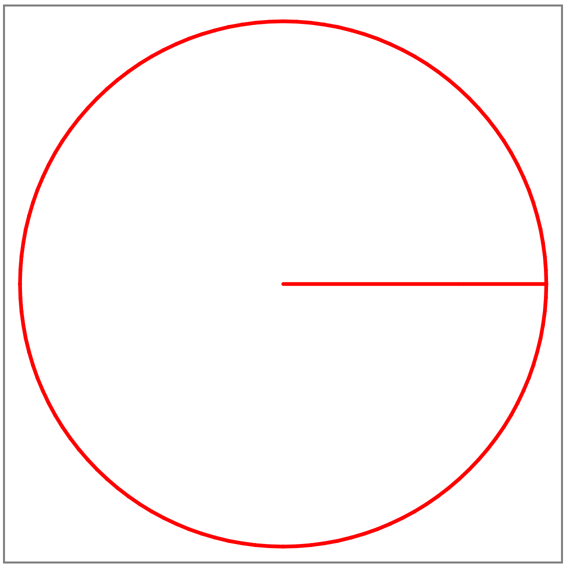
$$p\left(2r_a r_i - 2r_i^2\right) = 2\pi\left(r_a r_i - r_i^2\right)$$

$$p = \pi$$

Somit ist: $A_{\odot} = \pi r^2$

## 4 Unterteilung der Kreisfläche

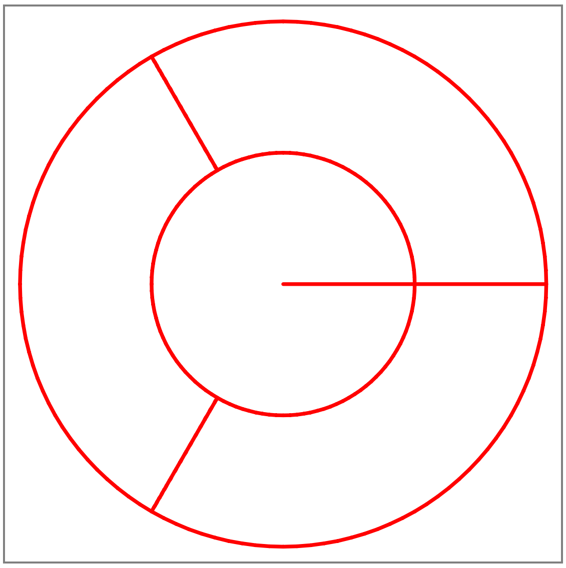
Wir unterteilen den Kreis in einen Teil.



**Ein Teil**

Meine Mutter gab bei allen passenden und unpassenden Gelegenheiten zum Besten, sie hätte einmal einen Kuchen gebacken und mir erlaubt, etwas davon abzuschneiden. Ich hätte dann von der Mitte her bis zum Rand geschnitten, und das Stück gegessen.

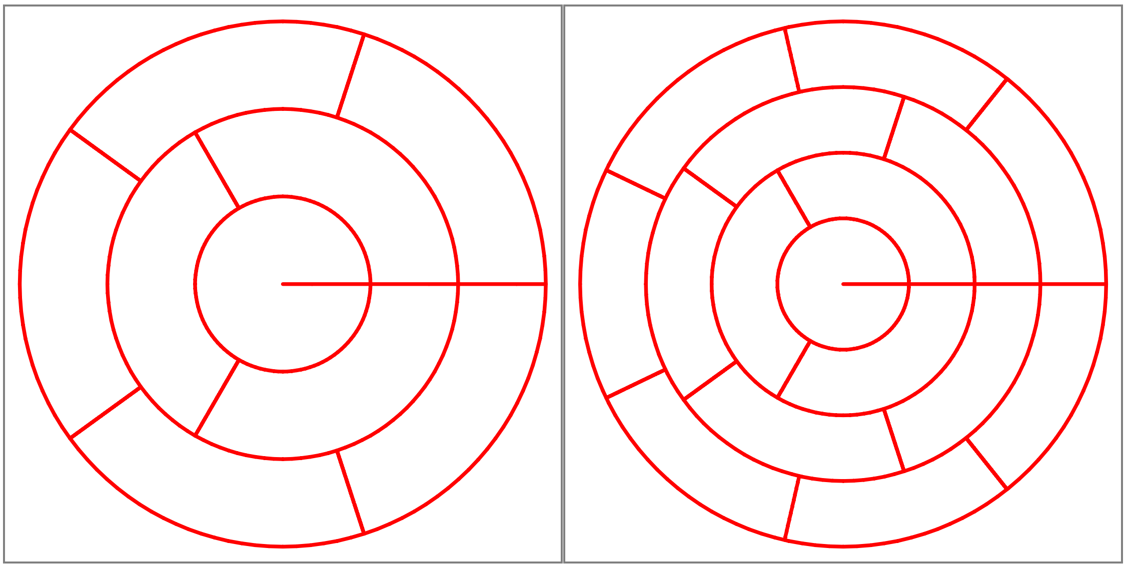
Nun unterteilen wir in vier flächenmäßig gleich große Teile:



**Vier gleich große Teile**

Dass die vier Teile flächenmäßig gleich groß sind, kann so eingesehen werden: Der innere Kreis hat den halben Durchmesser wie der große Kreis. Hat eine Figur die gleiche Form wie eine andere, ist aber längenmäßig nur halb so groß, dann ist ihr Flächeninhalt nur ein Viertel des Flächeninhaltes der anderen Figur. Der äußere Kreisring hat also noch den dreifachen Flächeninhalt des inneren Stückes; durch Dritteln des Ringes ergeben sich zusammen mit dem inneren Stück vier flächengleiche Teile.

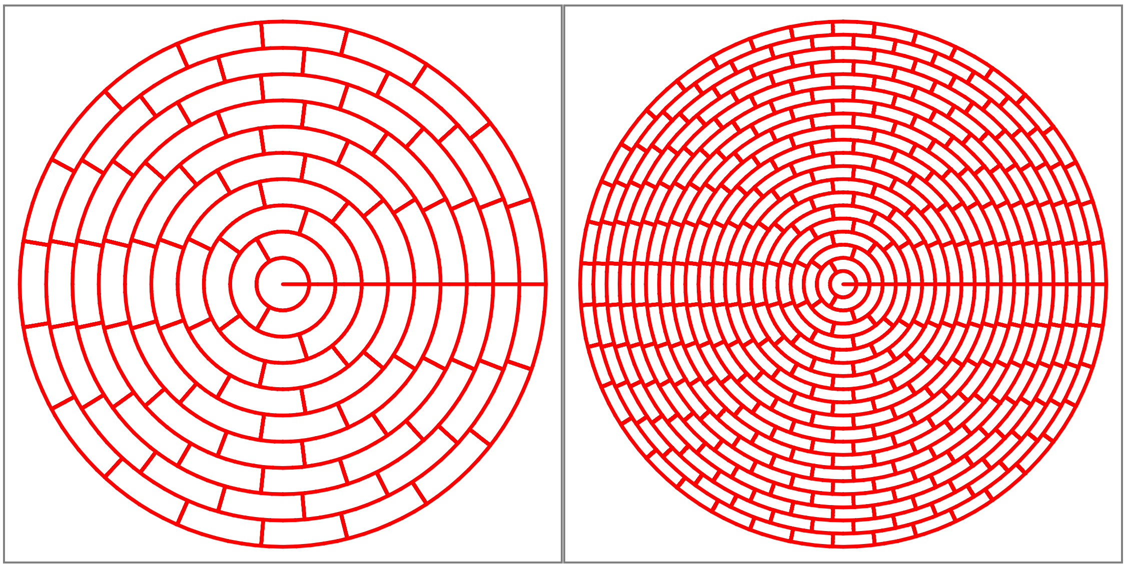
In den folgenden beiden Figuren sehen wir eine Unterteilung in neun beziehungsweise 16 gleiche Teile. Diese sind in drei beziehungsweise vier Ringen angeordnet.



**Neun beziehungsweise 16 gleich große Teile**

Die Ringe enthalten von innen nach außen $1, 3, 5, 7, \ldots, (2n-1)$ Teile, und insgesamt ergeben sich $1, 4, 9, 16, \ldots, n^2$ flächenmäßig gleich große Teile.

In den beiden folgenden Figuren hat es 100 respektive 400 gleich große Teile, angeordnet in 10 beziehungsweise 20 Ringen.



**100 respektive 400 gleich große Teile**

Die $(2n-1)$ Teile im äußersten Ring sind praktisch Rechtecke. Sie haben eine Breite von $\frac{r}{n}$ ($r$ ist der Kreisradius). Für die Länge machen wir eine Mittelrechnung: die äußere Länge ist $\frac{2\pi r}{2n-1}$, die innere Länge ist $\frac{2\pi\left(r-\frac{r}{n}\right)}{2n-1}$. Damit ergibt sich eine mittlere Länge $l$:

$$l = \frac{1}{2}\left( \frac{2\pi r}{2\text{n-1}} + \frac{2\pi\left(r - \frac{r}{n}\right)}{2\text{n-1}} \right) = \frac{1}{2n-1}\left(2\pi r - \frac{\pi r}{n}\right) = \frac{1}{2n-1}\,\frac{\pi r(2n-1)}{\text{n}} = \frac{\pi r}{n}$$

Für ein einzelnes Rechteck erhalten wir somit den Flächeninhalt:

$$A_{\text{Rechteck}} = \frac{\pi r}{n}\,\frac{r}{n} = \frac{\pi r^2}{n^2}$$

Der Kreis setzt sich aus $n^2$ flächengleichen Teilen zusammen, somit ist:

$$A_{\odot} = \pi r^2$$