Hans Walser, [20180718]

# Kreise und Ellipsen

## 1 Worum es geht

Wir setzen $n$ Kreise nebeneinander und zeichnen die Ellipse, welche die beiden äußersten Kreise ganz außen optimal berührt.

Die Abbildung 1 zeigt die Situation für $n = 5$.

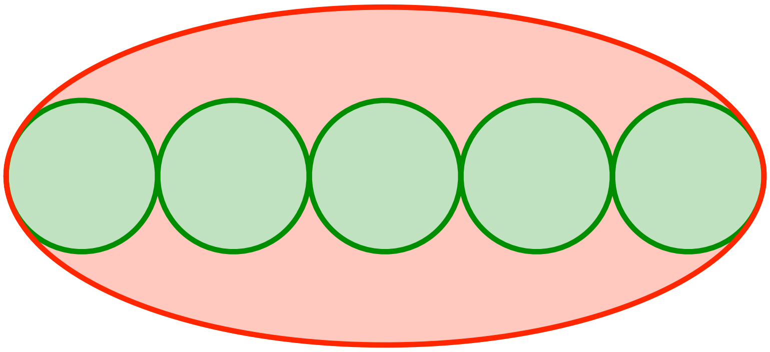


Abb. 1: Fünf Kreise und eine Ellipse

Die „optimale Berührung" meint, dass die beiden äußersten Kreise Scheitelkrümmungskreise der Ellipse sind.

Alles in allem eine Spielerei.

## 2 Berechnungen

Für die Berechnungen setzen wir die Kreisradien auf 1. Die Ellipse habe wie üblich die Halbachsen $a$ und $b$. Der Krümmungskreisradius am spitzen Scheitel ist:

$$\text{Krümmungskreisradius am spitzen Scheitel} = \frac{b^2}{a} \tag{1}$$

Wegen der verlangten optimalen Berührung ist:

$$1 = \frac{b^2}{a} \tag{2}$$

Weiter ist:

$$a = n \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$b = \sqrt{n} \tag{4}$$

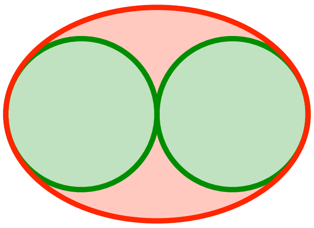
## 3 Beispiele

### 3.1 Ein Kreis

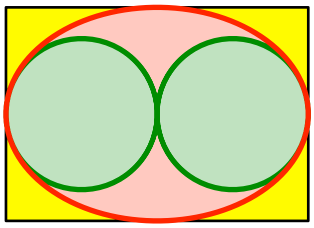
Der Kreis und die Ellipse fallen zusammen.

### 3.2 Zwei Kreise

Die Figur lässt sich in ein Rechteck im DIN-Format einpassen (Abb. 2b) [1]. Über das DIN-Format siehe Walser (2013b).



a)



b)

**Abb. 2: DIN-Format**

Die Ellipse berührt in den Scheiteln optimal, ist aber nicht optimal im Sinne des kleinsten Flächeninhaltes [2] .

### 3.3 Drei Kreise

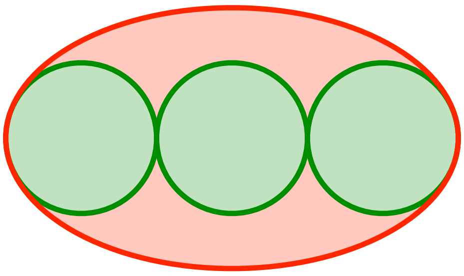


**Abb. 3: Drei Kreise**

Die Figur lässt sich mit gleichseitigen Dreiecken in Beziehung bringen (Abb. 4).

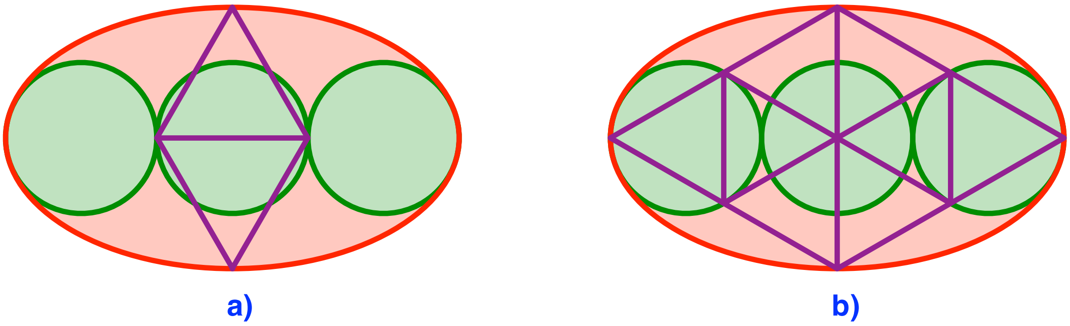



**Abb. 4: Mit gleichseitigen Dreiecken**

Die Abbildung 5 zeigt eine Überlagerung von drei Figuren der Abbildung 3, vgl. [3].

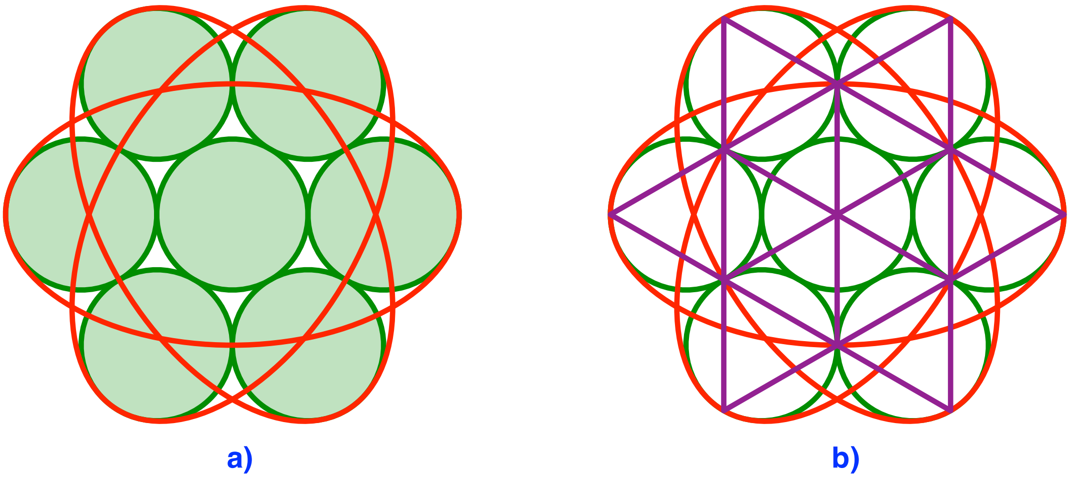



**Abb. 5: Sieben Kreise**

### 3.4 Vier Kreise

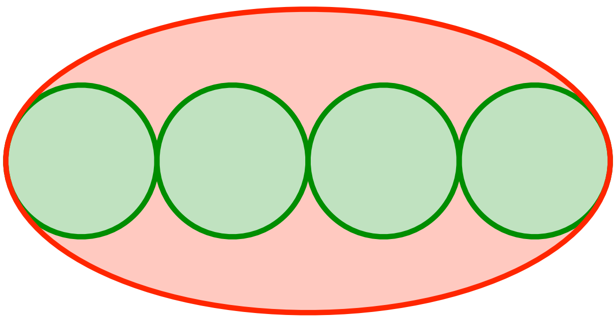


**Abb. 6: Vier Kreise**

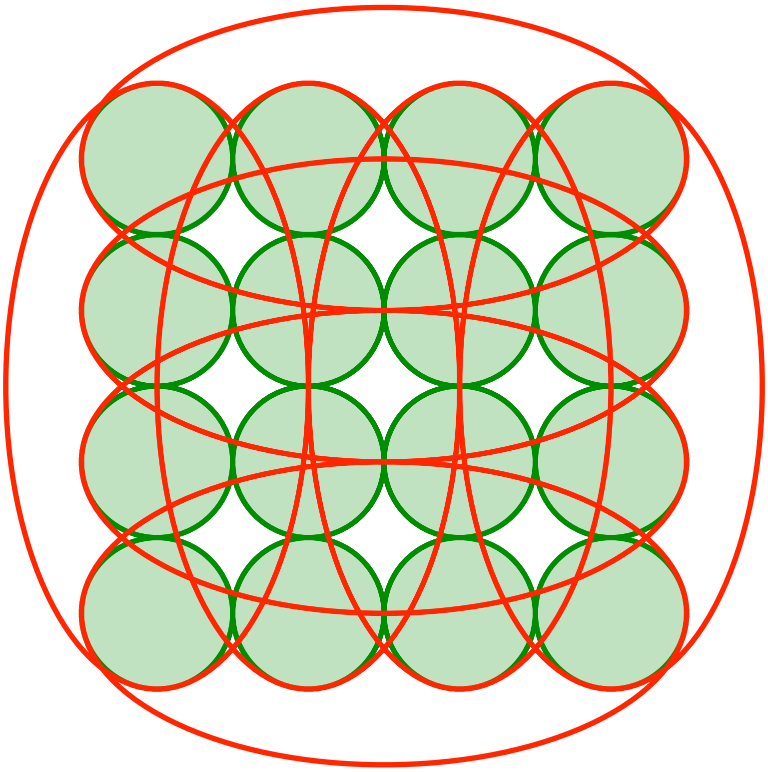


**Abb. 7: Vier mal vier Kreise**

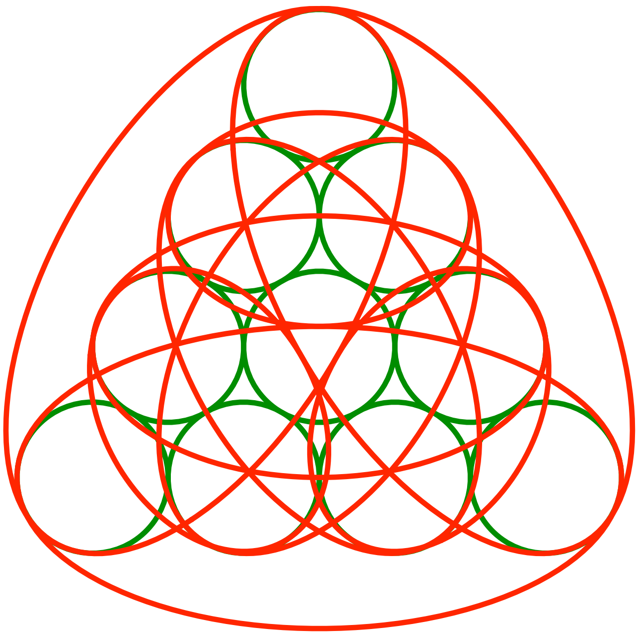


**Abb. 8: Tetraktys**

Die Tetraktys-Figur (Abb. 8) enthält viele falsche Freunde. Scheinbare Schnittpunkte von drei Ellipsen sind keine, scheinbare Berührungspunkte von zwei Ellipsen sind keine, der Umriss ist keine Reuleaux-Figur. Die Figur ist nicht konvex.

### 3.5 Fünf Kreise

Die Abbildung 1 zeigt die Situation mit fünf Kreisen.

Das umschließende Rechteck lässt sich in insgesamt zehn Goldene Rechtecke (gelb, zyan, orange) unterteilen. Über Goldene Rechtecke siehe Walser (2013a, S. 53).

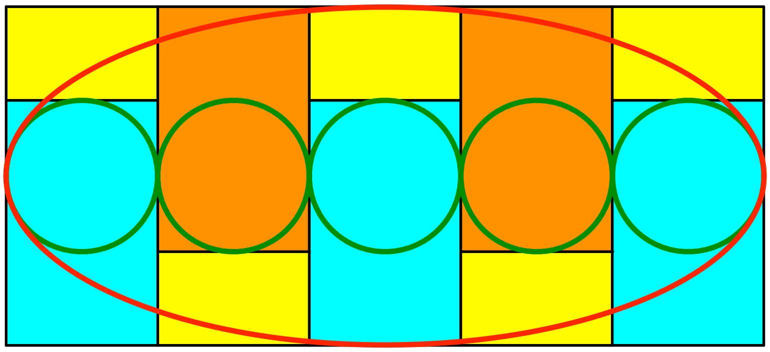


**Abb. 9: Unterteilung in Goldene Rechtecke**

### 3.6 Synopsis

Die Abbildung 10 zeigt eine Synopsis der bisherigen Figuren.

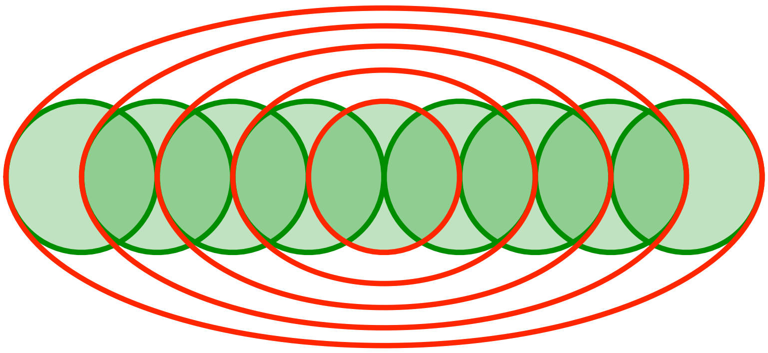


**Abb. 10: Synopsis**

Die überlappenden Kreise bilden Zweiecke. Wir passen in diese Zweiecke Ellipsen ein, welche in den Punkten links und rechts optimal berühren (Abb. 11). Diese Ellipsen sind ähnlich zur Ellipse der Abbildung 2.

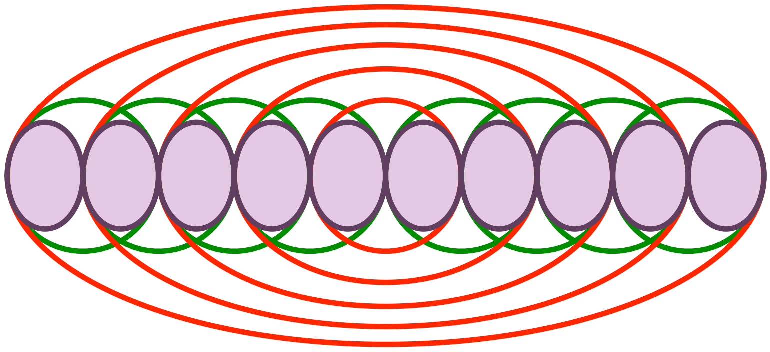


**Abb. 11: Stehende Ellipsen**

### 3.7 Synopsis mit Parabel

Die Abbildung 12 zeigt eine andere Anordnung der Ellipsen. Die stumpfen Scheitel der Ellipsen liegen auf einer liegenden Parabel.

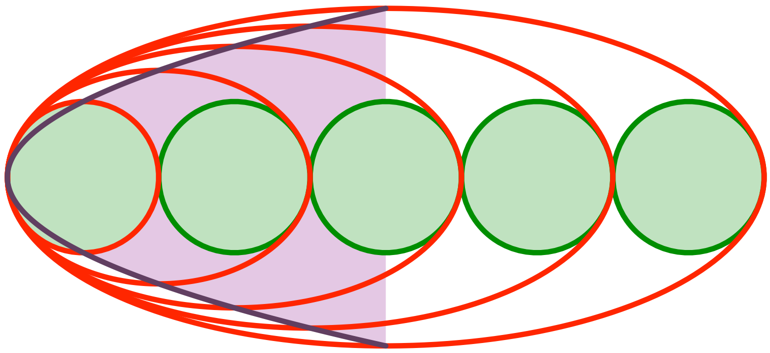


**Abb. 12: Parabel**

## 3.8 Neun mal neun Kreise

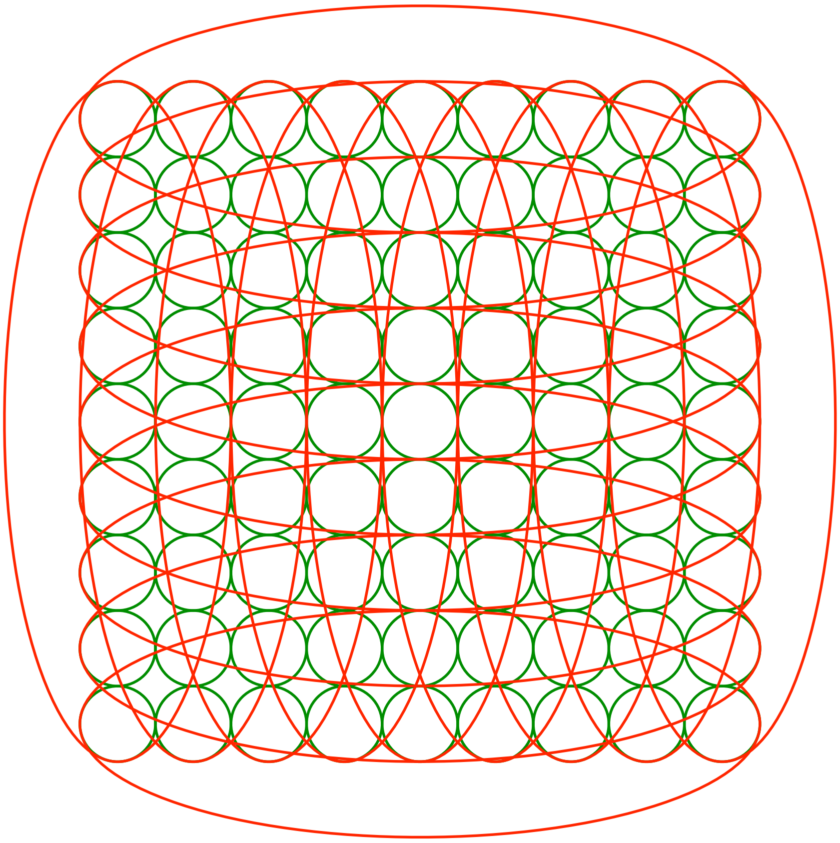


**Abb. 13: Neun mal neun Kreise**

## Websites

[1] Hans Walser: Ellipsen im DIN-Format (abgerufen 18.07.2018):
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/E/Ellipsen_DIN/Ellipsen_DIN.htm

[2] Hans Walser: Minimalellipse (Abgerufen 18.07.2018):
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Minimalellipse/Minimalellipse.htm

[3] Hans Walser: Orthogonale Großkreise in isometrischer Darstellung (abgerufen 19.07.2018):
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/O/Orth_Grosskreise/Orth_Grosskreise.htm

## Literatur

Walser, Hans (2013a): Der Goldene Schnitt. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-937219-85-1.

Walser, Hans (2013b): DIN A4 in Raum und Zeit. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2013. ISBN 978-3-937219-69-1.