

Hans Walser, [20170218]

Kreise im Goldenen Schnitt

1 Ausgangsfiguren

Es sei (Goldener Schnitt, Walser 2013):

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

Zum Einheitskreis werden vier Kreise mit den Radien $\phi^{-1}, \phi^{-2}, \phi^{-3}, \phi^{-4}$ gezeichnet (Abb. 1). Die Radien bilden also eine geometrische Folge mit dem Goldenen Schnitt als Folgenquotient.

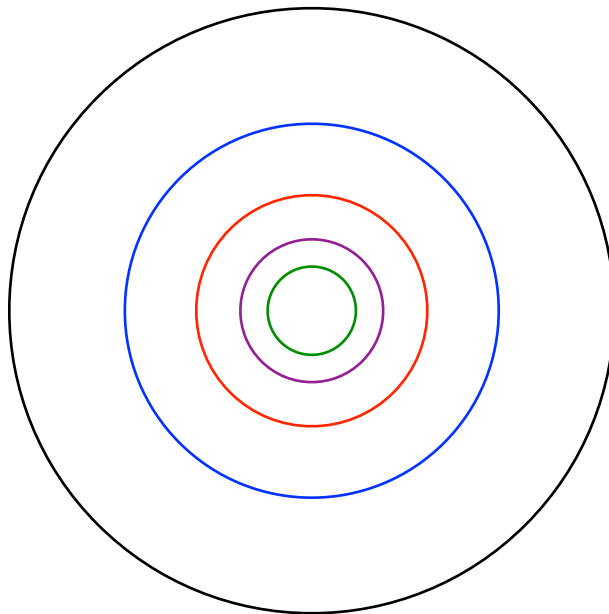


Abb. 1: Ausgangsfiguren

2 Berührende Anordnungen

Wir können diese Kreise sukzessive berührend anordnen.

Die zwei größten Kreise (Major und Minor) passen in den Einheitskreis (Abb. 2).

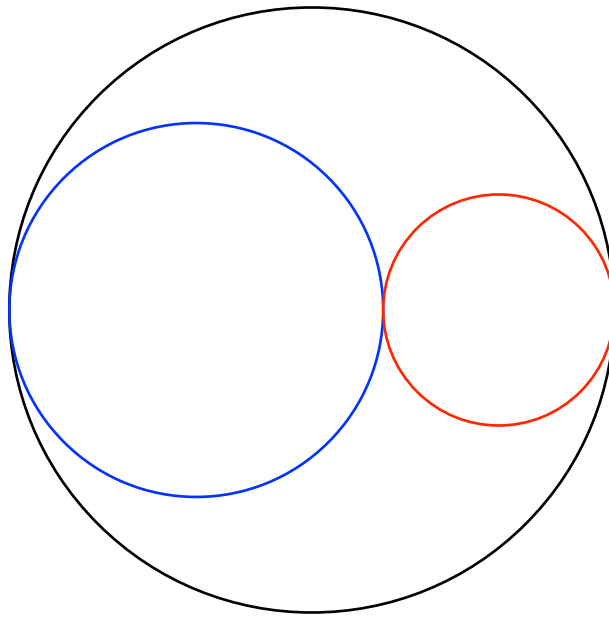


Abb. 2: Major und Minor

Durch Iteration können wir einen weiteren Kreis (lila) der Serie einpassen (Abb. 3).

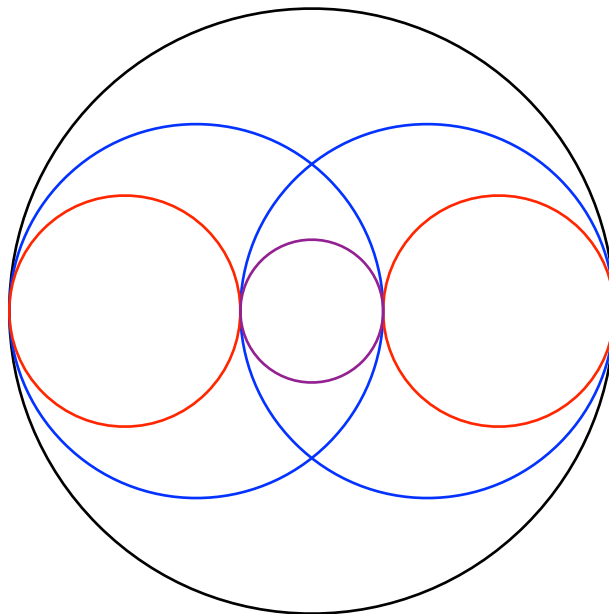


Abb. 3: Dritter Kreis

Die Figuren der Abbildungen 2 und 3 ergeben sich unmittelbar aus den Eigenschaften des Goldenen Schnittes.

Und nun kommt eine erste Überraschung: den lila Kreis können wir auch oben und unten berührend einpassen (Abb. 4). Das ist nicht trivial. Ich habe es durch Nachrechnen verifiziert.

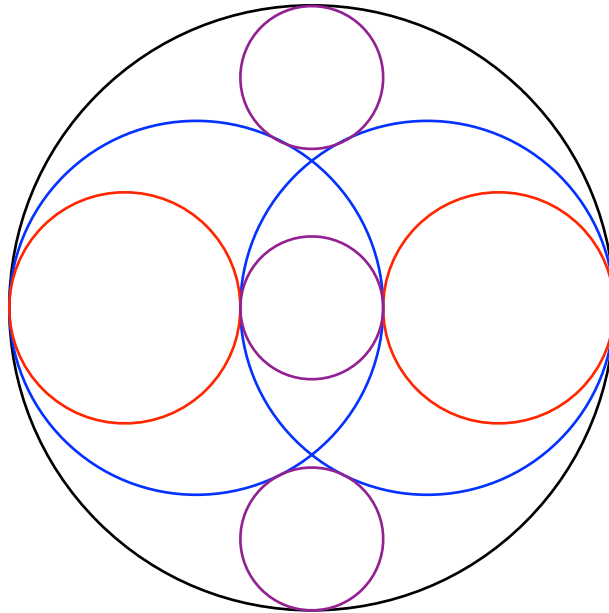


Abb. 4: Einpassen des kleinsten Kreises

Nun können wir aus Symmetriegründen weitere Kreise einfügen (Abb. 5).

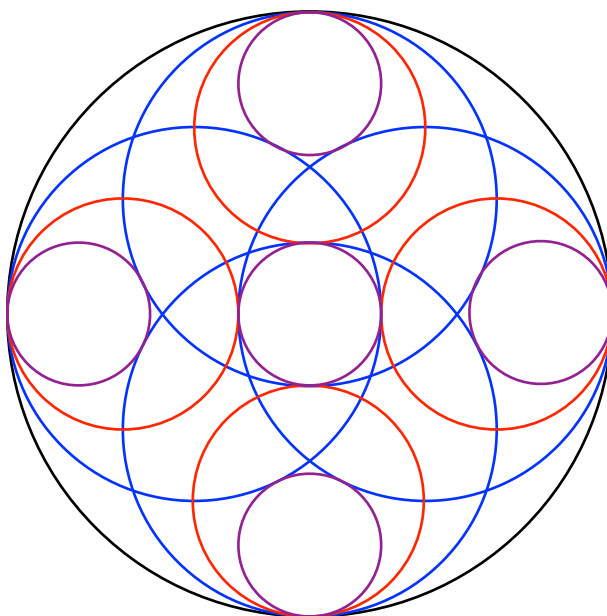


Abb. 5: Weitere Kreise

Und nun folgt die zweite Überraschung: wir können vier weitere lila Kreise einpassen (Abb. 6).

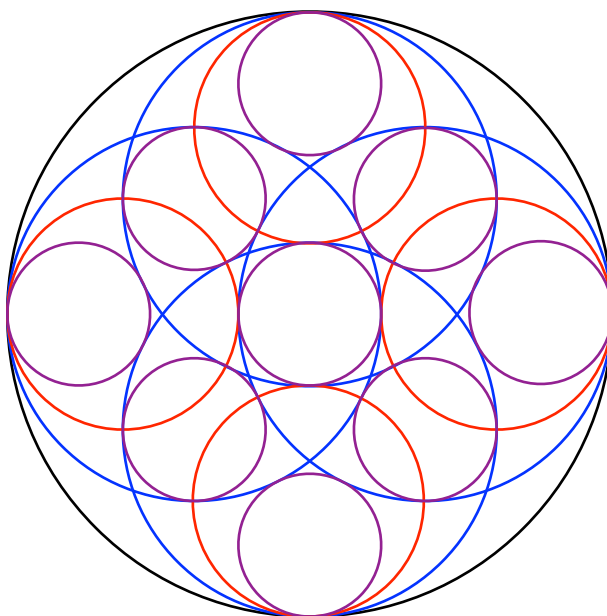


Abb. 6: Vier weitere lila Kreise

Auch dies ist nicht trivial und muss verifiziert werden. Die insgesamt neun lila Kreise liegen in einem quadratischen 3×3 -Raster. Auch dies muss verifiziert werden.

Die vier neuen lila Kreise berühren die blauen Kreise (Majore) in den Schnittpunkten der blauen Kreise mit den roten Kreisen (Minore). Die Schnittwinkel sind rechte Winkel.

In der Abbildung 7 sind die roten Kreise (Minore) weggelassen.

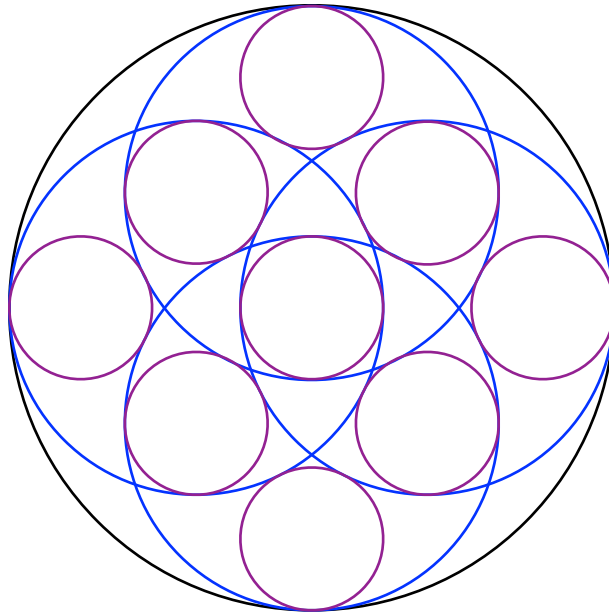


Abb. 7: Ohne Minore

Und jetzt können wir noch zwölf grüne Kreise einpassen (Abb. 8). Für die vier grünen Kreise zwischen den lila Kreisen folgt das aus den Eigenschaften des Goldenen Schnittes. Für die acht grünen Kreise, welche auch den schwarzen Randkreis berühren, ist das wiederum eine Überraschung und muss verifiziert werden. Die grünen Kreise sind ebenfalls in einem Quadratraster angeordnet.

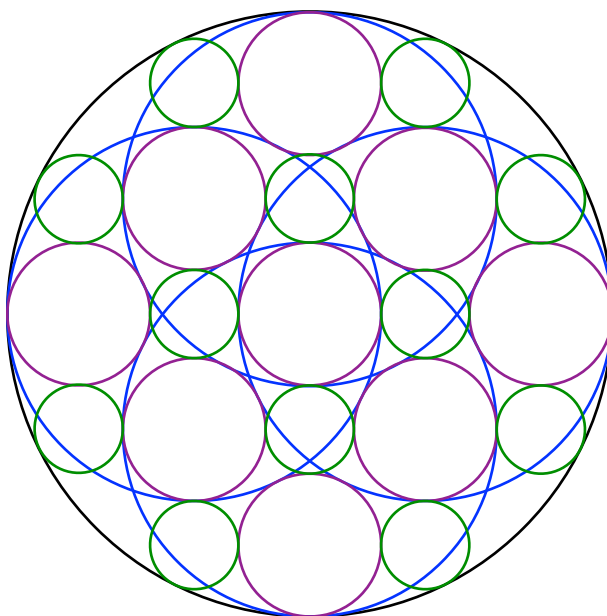


Abb. 8: Die ganz kleinen

In der Abbildung 9 sind die blauen Kreise (Majore) weggelassen.

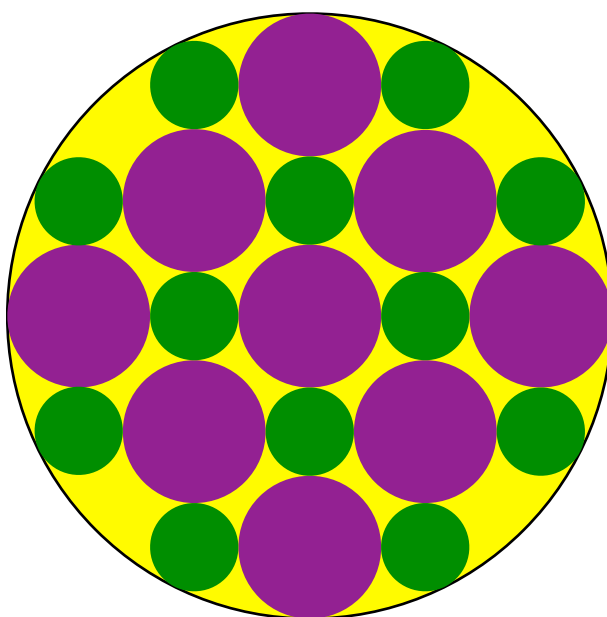


Abb. 9: Kreispackung im Goldenen Schnitt

Wir überlegen mit dynamischer Kopfgeometrie, dass diese Figuren nur mit Kreisen im Radienverhältnis des Goldenen Schnittes funktionieren.

Literatur

Walser, Hans (6. Auflage). (2013). Der Goldene Schnitt. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.