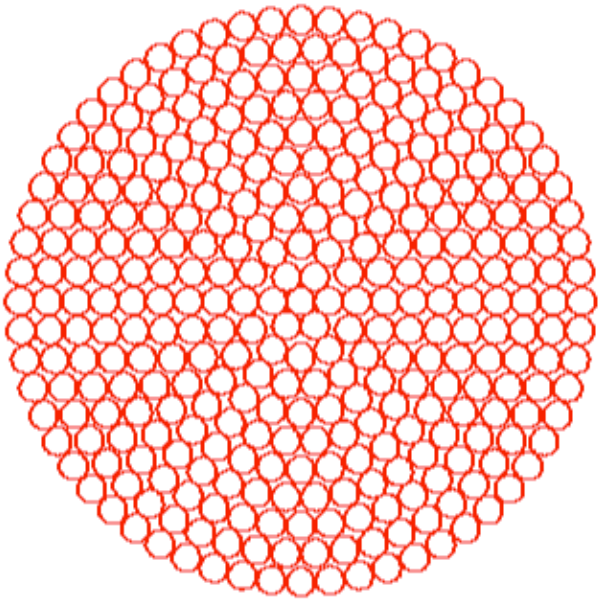
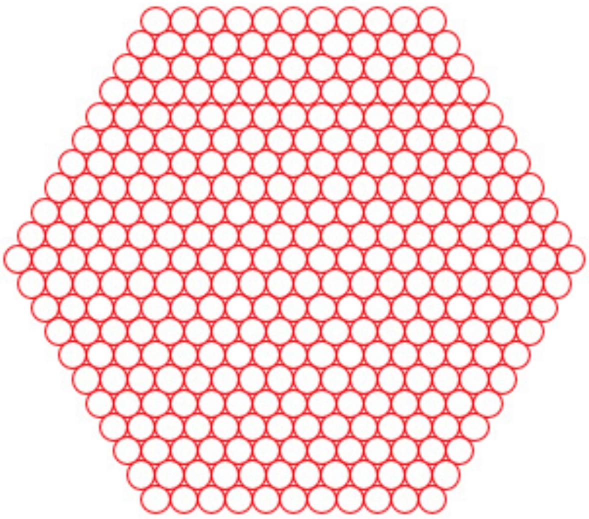
Kreisanordnungen

Die folgende Figur zeigt eine kreisförmige Anordnung von Kreisen.



Kreisförmige Anordnung von Kreisen

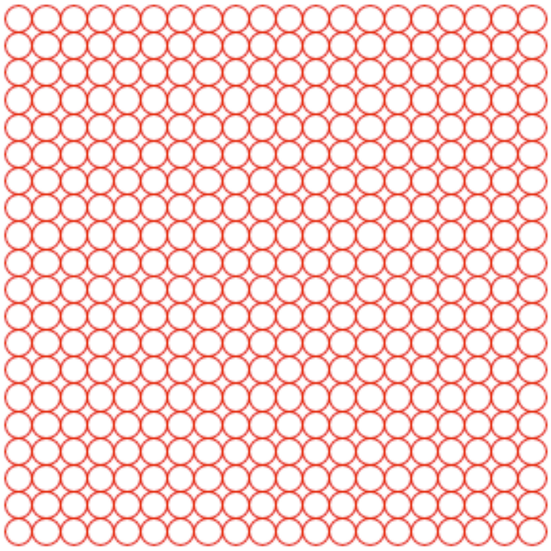
Im Zentrum sehen wir einen Kreis, der von sechs weiteren Kreisen umgeben ist. Der nächste kranz schein sich aber nicht optimal anzupassen, wir sehen Zwischenräume, welche sich vermutlich verkleinern lassen. Wenn wir das tun, erhalten wir eine hexagonale Anordnung der Kreise.



Hexagonale Anordnung

Die hexagonale Anordnung hat die Dichte $\rho_{\text{hexagonal}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.907$.

Eine weitere, simple Anordnung ist die Anordnung im Quadratraster. Diese hat die Dichte $\rho_{\text{quadratisch}} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785$. Diese Dichte ist deutlich schlechter als bei der hexagonalen Anordnung.



Anordnung im Quadratraster

In der kreisförmigen Anordnung schimmern beide Typen durch. Entlang der horizontalen Achse entwickelt sich nach außen die Anordnung im Quadratraster, entlang der Vertikalen Achse die hexagonale Anordnung.

Frage: Wie groß ist die Dichte der kreisförmigen Anordnung für $n \to \infty$, wenn n die Anzahl der Kreisringe bezeichnet?

In einer Anordnung mit n Ringen (Zentrum wird als Ring 0 bezeichnet) haben wir insgesamt $1 + 3n(n+1) = 3n^2 + 3n + 1$ kleine Kreise. Wenn wir die kleinen Kreise als Einheitskreise wählen, hat der zugehörige Trägerkreis den Radius $2n+1$. Für die Dichte ergibt sich daher:

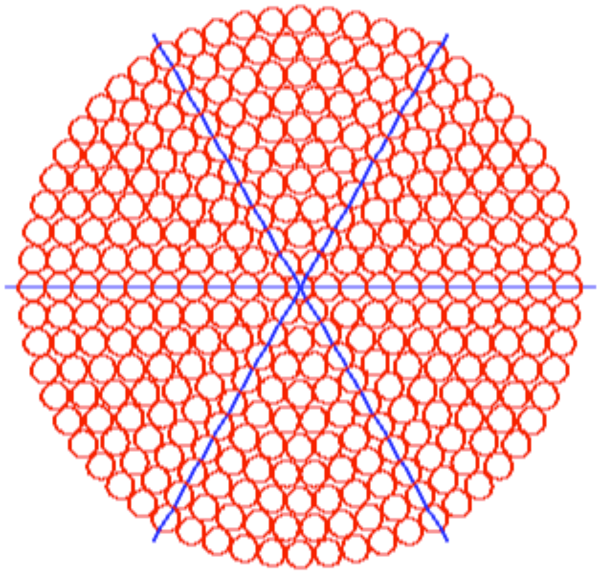
$$\rho_{\text{kreisförmige Anordnung}}(n) = \frac{\left(3n^2+3n+1\right)\pi}{(2n+1)^2\pi} = \frac{3n^2+3n+1}{4n^2+4n+1}$$

Daraus ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\rho_{\text{kreisförmige Anordnung}}(n)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+3n+1}{4n^2+4n+1}\right) = \frac{3}{4}$$

Diese Dichte ist überraschenderweise noch schlechter als bei der quadratischen Anordnung.

Tatsächlich ist es so, dass sich nur die Kreise auf den drei Achsen der folgenden Figur berühren, alle anderen Kreise sind isoliert.



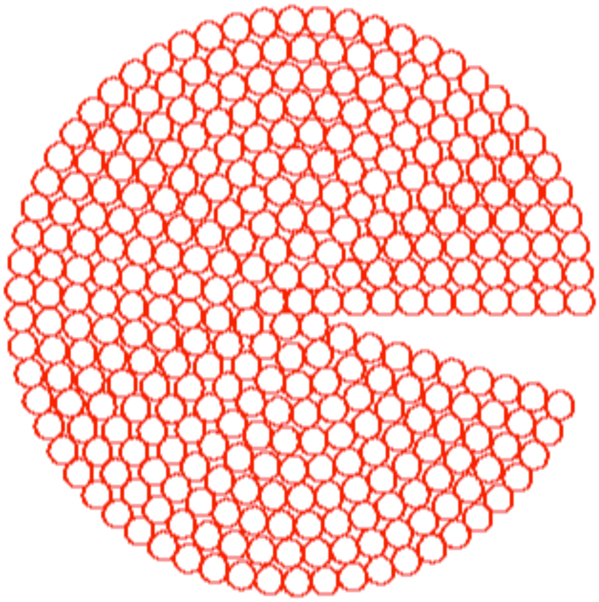
Die einzigen Berührungspunkte liegen auf den blauen Achsen

Der Bogenabstand von Zentrum zu Zentrum zweier benachbarter Kreise im selben Ring ist $b = 2\frac{\pi}{3} \approx 2.094$, zwei solche Kreise haben also einen Abstand, der „janz weit außen" gegen $2\frac{\pi}{3} - 2 \approx 0.094$ tendiert. Für eine Anordnung in einem Rechtecksraster mit dem Maschenrechteck $2 \times \frac{2}{3}\pi$ ergibt sich die Dichte:

$$\rho_{\text{Rechtecksraster}} = \frac{\pi}{4}\frac{1}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4}$$

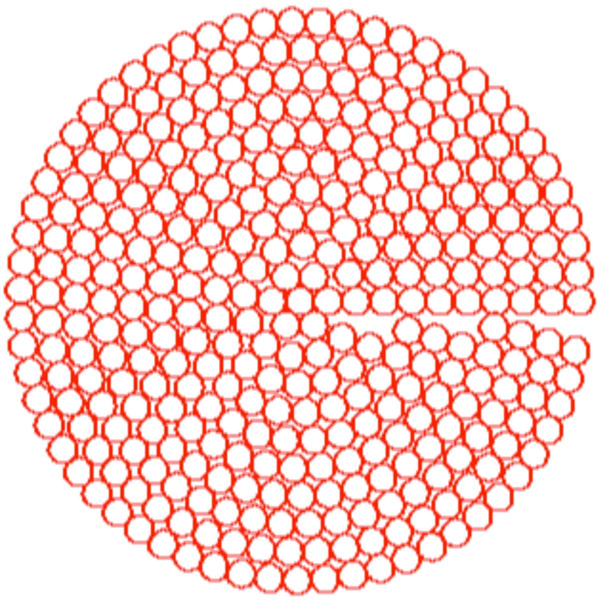
Dies ist die Dichte in unserer kreisförmigen Anordnung.

Wenn wir die Kreise im selben Ring zusammenschieben bis zur Berührung, ergib sich folgendes Bild.



Es haben noch einige Kreise Platz

Es haben noch einige Kreise Platz.



Zusätzliche Kreise