Rolfdieter Frank / Hans Walser

Korbbögen – wie kriegen wir die Kurve?

Kurzfassung: Es geht darum, wie wir zwischen zwei Geraden die Kurve kriegen. Präziser: Zwei orientierte Geraden sollen durch Kreisbögen glatt und orientierungskonsistent verbunden werden, wobei die Anschlusspunkte auf den Geraden vorgegeben sind. In der Regel geht es mit zwei Kreisbögen, wobei der Übergangspunkt zwischen den Kreisbögen oder aber die Übergangsrichtung eine gewisse Wahlfreiheit zulassen.

1 Einführung

Aus Kreisbogen unterschiedlicher Krümmung zusammengesetzte Kurven finden wir in der Architektur, etwa bei Torbogen, in der Kunst, aber auch im Modelleisenbahnbau. Solche Kurven werden als *Korbbögen* bezeichnet (vgl. [1], [2]).

2 Problemstellung

Gegeben sind zwei orientierte Geraden a und b mit je einem Punkt $A \in a$ und $B \in b$. Die beiden Geraden sollen durch einen oder mehrere Kreisbogen so verbunden werden, dass die Übergänge glatt sind, das heißt ohne unstetige Richtungsänderung. Der erste Kreisbogen soll in A ansetzen und der letzte Bogen in B einfahren. Zudem soll der Durchlaufsinn erhalten bleiben. Die Figur 1 zeigt zwei Beispiele, die sich von der Vorgabe her nur in der Orientierung der Geraden b unterscheiden.

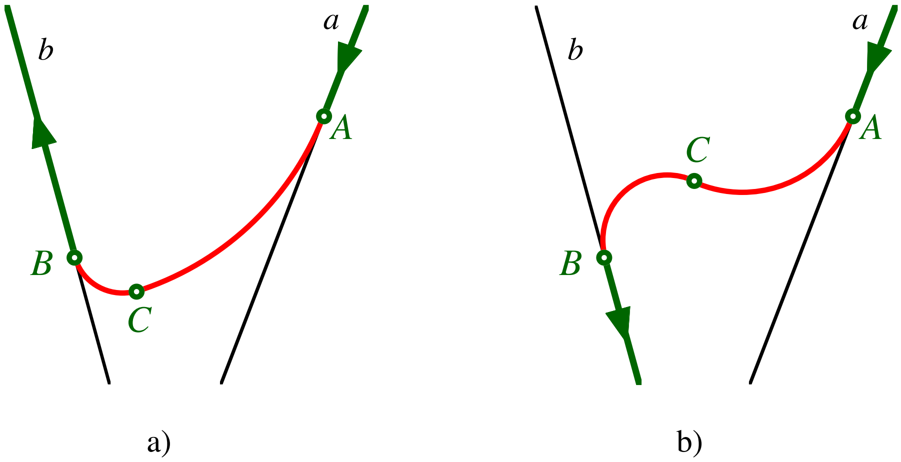

Fig. 1 Unterschiedliche Orientierung

In beiden Fällen setzt sich das Übergangsstück aus zwei Kreisbögen mit einem Übergangspunkt C zusammen.

3 Fragen

Brauchen wir immer zwei Kreisbögen? Ist das Problem immer lösbar? Ist die Lösung eindeutig? Falls es mehrere Lösungen gibt, welches ist die beste? Schließlich: Wie finden wir Lösungen?

Für die heuristische Untersuchung solcher Fragen ist es sinnvoll, mit dynamischer Geometrie-Software (DGS) zu arbeiten.

4 Ausmitteln für den Idealfall

Wir diskutieren den Fall der Figur 1a); im Fall der Figur 1b) kann analog argumentiert werden.

Mit einem einzigen Kreisbogen geht es offenbar genau dann, wenn sich die beiden Anschlusspunkte gegenüberliegen. Wir können einen solchen Fall durch „Ausgleichen“ konstruieren: Zunächst spiegeln wir die Punkte A und B an der Achse n, welche die orientierte Gerade a auf die gegengleich orientierte Gerade b spiegelt. Die Bildpunkte seien A' und B'. Und nun seien A^* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB'}$ und B^* die Mitte von $\overline{BA'}$. Dann gibt es genau einen Bogen k^* mit den Anschlusspunkten A^* und B^* (Fig. 2); sein Zentrum sei M.

Auf a haben wir den Weg um $\overline{AA^*}$ verlängert und auf b um gleich viel verkürzt.

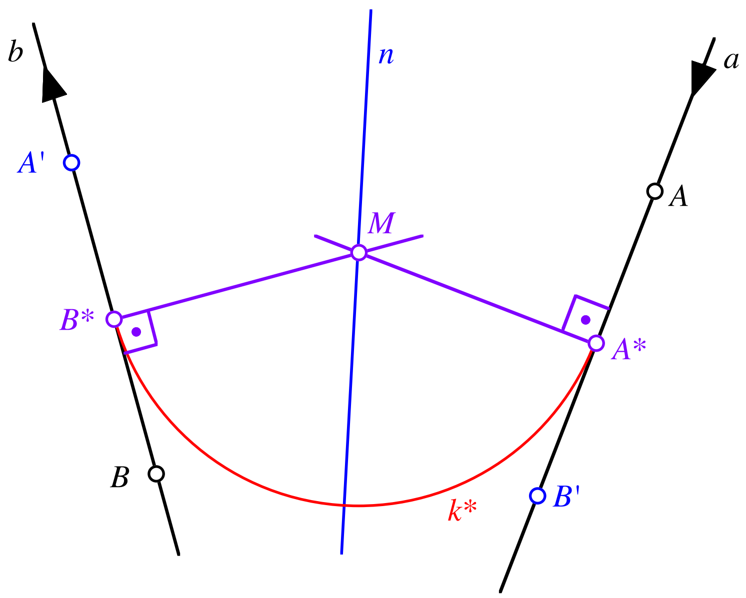

Fig. 2 Idealfall

5 Der reale Fall

Ausgehend von diesem Idealfall können wir nun aber auch den realen Fall angehen. Zunächst – und das ist nun etwas subtil – zerlegen wir den Bogen k^* künstlich in zwei Teilbögen mit einem Übergangspunkt C^*, den wir natürlich beliebig auf k^* wählen können. In C^* zeichnen wir die orientierte Tangente c an k^*; die Orientierung soll konsistent mit der Orientierung des Bogens k^* sein.

Auf c wählen wir C so, dass die Strecken $\overline{CC^*}$ und $\overline{AA^*}$ gleich lang, aber entgegengesetzt orientiert sind (Fig. 3).

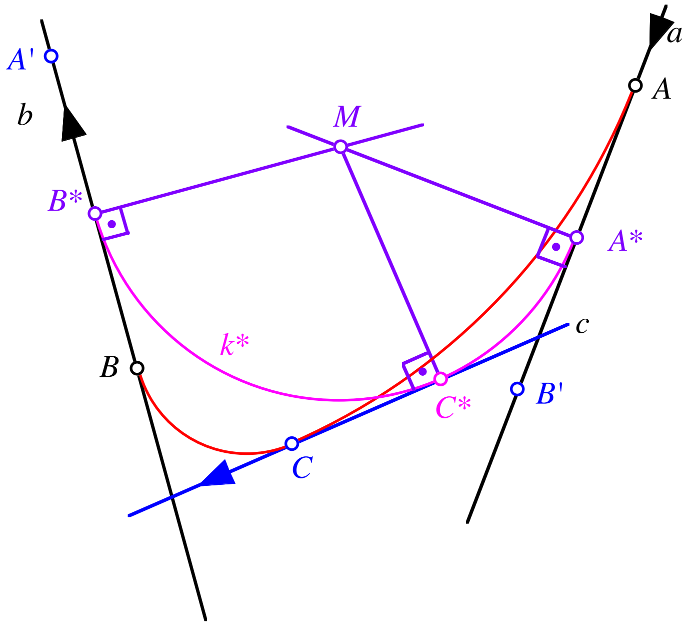

Fig. 3 Anschlusspunkte *A* und *B*

Nun haben wir bezüglich a und c die symmetrische Idealsituation, und ebenso bezüglich c und b. Wir können also einen Bogen von A nach C und einen zweiten Bogen von C nach B einzeichnen. Damit ist unsere Aufgabe gelöst.

6 Diskussion der Lösung

Nun war aber die Wahl des Punktes C^* auf k^* frei; es gibt also unendlich viele Lösungen. Mit der Wahl von C^* wird die Richtung der Übergangstangente c festgelegt. Wir können also die Übergangsrichtung in C wählen.

Da die fünf Dreiecke MAA^*, MBB^*, MCC^*, $MA'B^*$, $MB'A^*$ kongruent sind, liegen die fünf Punkte A, B, C, A', B' auf einem Kreis k mit Zentrum M. Statt der Übergangsrichtung können wir also auch den Übergangspunkt $C \in k$ wählen (Fig. 4). Der Korbbogen schneidet diesen Kreis k in A, B und C unter alternierenden Winkeln gleicher Größe.

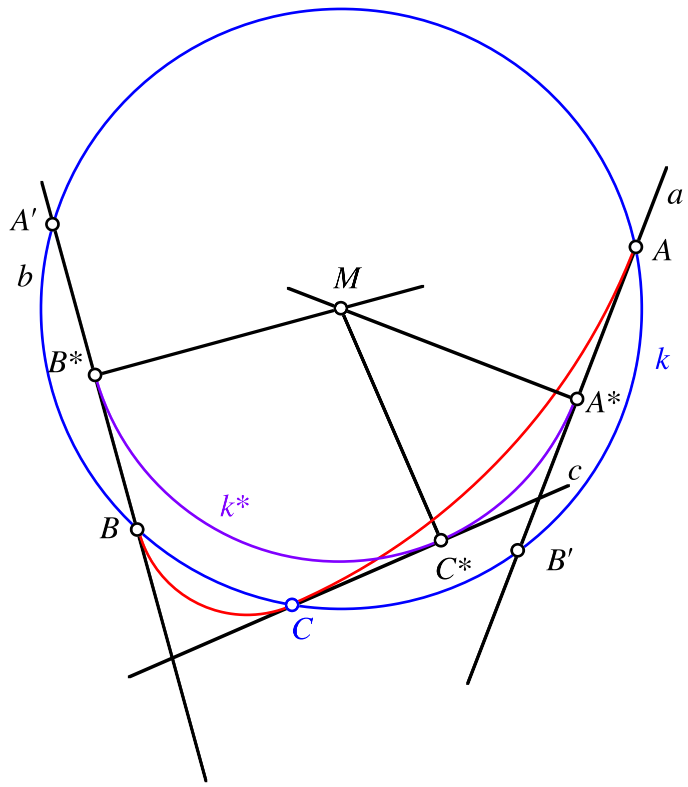

Fig. 4 $C \in k$

Die Figur 5 zeigt fünf Beispiele für die Wahl von *C*.

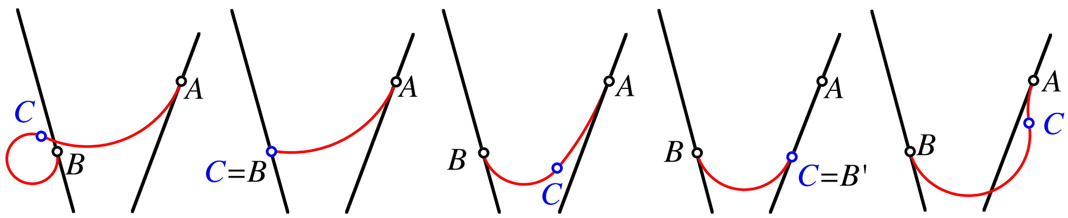

Fig. 5 Beispiele

In den Fällen mit einer Gleisüberwerfung haben wir in *C* einen Wendepunkt.

Im Sonderfall *C*=*B* wird der Radius r_B des zweiten Bogens Null; der Bogen wird zu einem Punkt. Im Sonderfall $C = B'$ wird der erste Bogen zu einem geraden Streckenstück; es ist dann $r_A = \infty$. In diesen beiden Sonderfällen ist also $\frac{r_A}{r_B} = \infty$. Für welche Situation von *C* ist das Radienverhältnis $\frac{r_A}{r_B}$ möglichst nahe bei Eins?

6.1 Gesamtlänge

Ein Experiment mit DGS zeigt, dass die gesamte Korbbogenlänge im Sonderfall *C*=*B* minimal wird. In diesem Sonderfall haben wir aber keinen echten Korbbogen mehr, die Bedingung des glatten Überganges ist in *B* verletzt. Es gibt also keinen echten Kreisbogen, der die minimale Länge realisiert — das ist ein Problem wie jenes, dass es keine minimale rationale Zahl größer als $\frac{1}{2}$ gibt.

6.2 Radienverhältnis

Wir suchen nun die Situation, für welche C kein Wendepunkt ist und das Radienverhältnis $\frac{r_A}{r_B}$ möglichst nahe bei Eins liegt. Mit k_A und k_B bezeichnen wir die Trägerkreise des ersten beziehungsweise zweiten Bogens. Ferner seien $n_A(=AA')$ und $n_B(=BB')$ die Lotgeraden von A und B auf n. Ein Experiment mit DGS zeigt, dass das Radienverhältnis extremal wird für $C \in n$ (Figur 6).

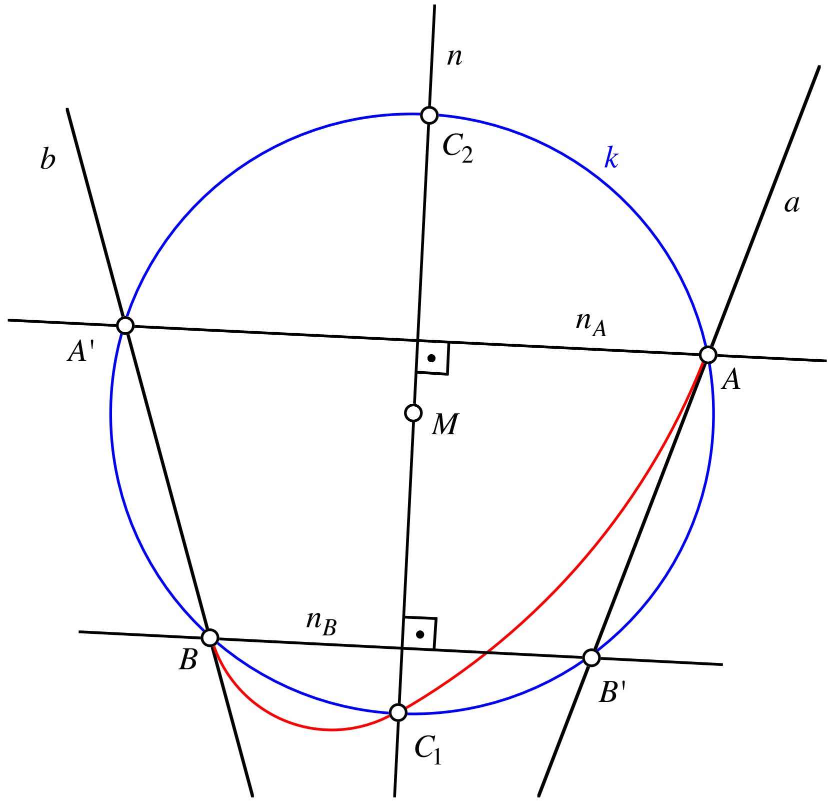

Fig. 6 Extremales Radienverhältnis

Dies ist eine Folge der Verhältnisgleichheit:

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{\mathrm{d}(C,n_A)}{\mathrm{d}(C,n_B)}$$

Diese Verhältnisgleichheit kann wie folgt bewiesen werden (Fig. 7):

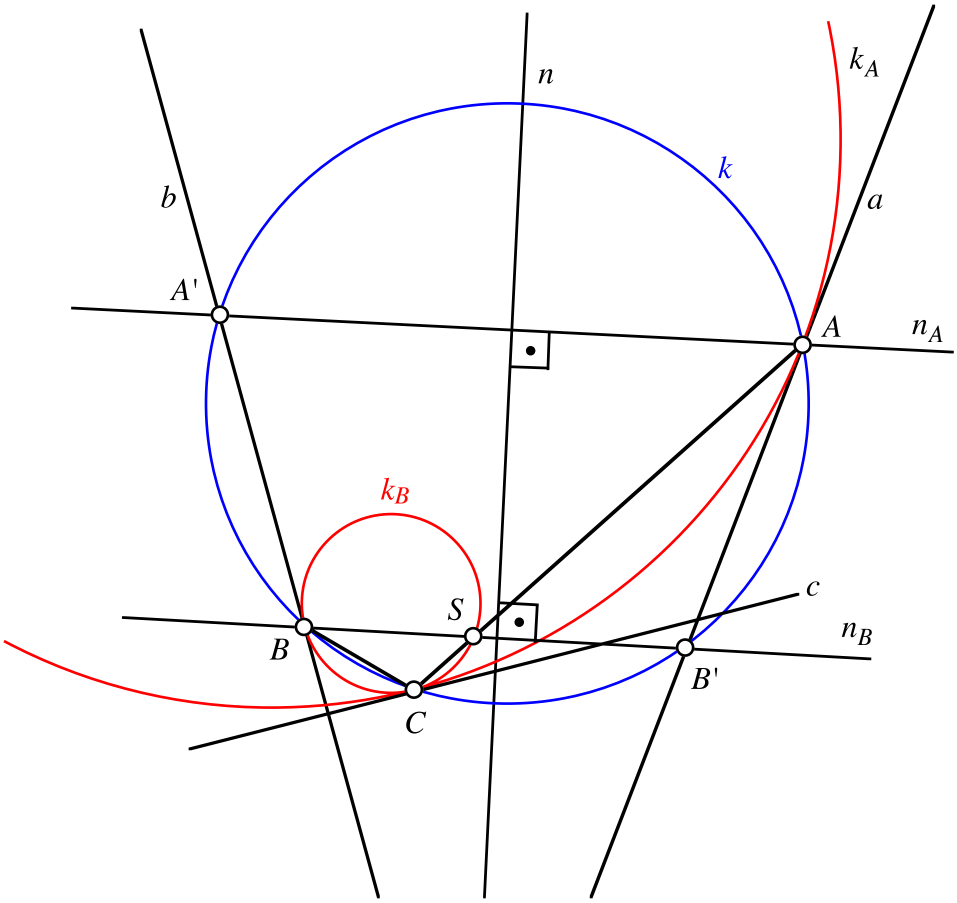

Fig. 7 Beweisfigur

Es sei $S := AC \cap n_B$. Dann liegt S auf k_B, denn wegen dem Peripheriewinkelsatz (für k) gilt $\angle b,BC = \angle n_A, AC = \angle n_B, AC$, und mit der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes folgt $S \in k_B$. Da k_A und k_B in C die gleiche Tangente c haben, ist der Bogen über $\overline{AC}$ ähnlich zum Bogen über $\overline{SC}$, und wir erhalten:

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{\mathrm{d}(C,A)}{\mathrm{d}(C,S)} = \frac{\mathrm{d}(C,n_A)}{\mathrm{d}(C,n_B)}$$

7 Sonderfall

Unsere Überlegungen sind nicht durchführbar, wenn die beiden Geraden a und b parallel und gleich orientiert sind (Fig. 8a)).

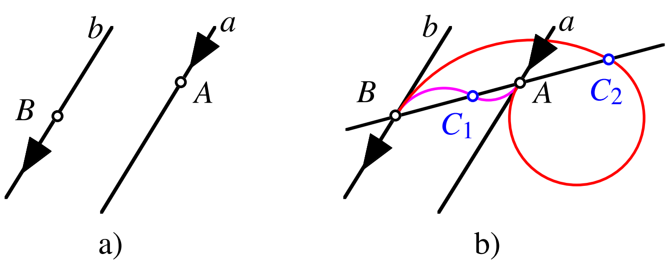

Fig. 8 Sonderfall

In diesem Fall gibt es nämlich keine Gerade n, welche die orientierte Gerade a auf die gegengleich orientierte Gerade b spiegelt.

In diesem Fall kann aber der Übergangspunkt C beliebig auf $AB\setminus\{A,B\}$ gewählt werden (Fig. 8b)), das heißt, die Gerade AB übernimmt die Rolle des Kreises k. Das Verhältnis der Radien ist dann:

$$\frac{r_A}{r_B}=\frac{\mathrm{d}(C,A)}{\mathrm{d}(C,B)}$$

Für jedes C im Intervall (A,B) hat der Korbbogen die gleiche Gesamtlänge.

8 Physikalische Bemerkung

Die „richtigen" Eisenbahnen fahren nicht auf Korbbögen. Selbst bei einem glatten Übergang von einem Kurvenstück auf das nächste ergibt sich durch die unstetige Krümmungsänderung eine abrupte Änderung der Radialbeschleunigung. Dies hat einen großen Materialverschleiß zur Folge und kann zu Unfällen führen. In der Verkehrstechnik wird deshalb zwischen zwei Abschnitten unterschiedlicher Krümmung ein Übergangsstück mit kontinuierlicher Krümmungsveränderung eingebaut. Das kann zum Beispiel mit einem *Klothoidenbogen* gemacht werden, in welchem die Krümmung sich proportional zur Bogenlänge verändert.

Literatur

[1] Giering, Oswald: Zur Geometrie der Polygon-Korbbögen. PM, Praxis der Mathematik (34), 1992, S. 245-248.

[2] Walser, Hans: Geschlossene Korbbögen. PM, Praxis der Mathematik (38), 1996, S. 169-172.

Anschriften der Verfasser:

Prof. Dr. Rolfdieter Frank, Mathematisches Institut der Universität Koblenz-Landau, Universitätsstraße 1, D-56070 Koblenz

Dr. Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld