Hans Walser, [20171130]

Konvexe Epizykloide

Anregung: A. V., B.

1 Worum geht es?

Eine Epizykloide hat die Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(t) + r\cos(\omega t) \\ y(t) &= \sin(t) + r\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{1}$$

Die Abbildung 1 zeigt Beispiele. In allen drei Beispielen ist $\omega = 6$. Weiter ist der Reihe nach a) $r = 0.07$, b) $r = 1$ und c) $r = 0.015$.

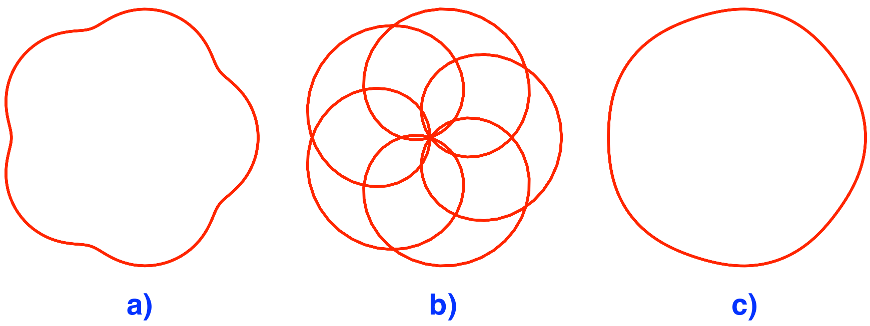

Abb. 1: Beispiele

Das Beispiel a) ist nicht konvex, die Kurve hat Wendepunkte. Im Beispiel b) hat die Epizykloide keine Wendepunkte, also immer die gleiche Krümmung. Sie ist „lokal konvex“. Als Ganzes ist die Kurve nicht konvex. Im Beispiel c) ist die Epizykloide konvex.

Wir fragen, unter welchen Bedingungen wir eine konvexe Epizykloide erhalten.

2 Konvexität

Für

$$r \le \frac{1}{\omega^2} \tag{2}$$

erhalten wir eine konvexe Epizykloide.

In den folgenden Beispielen ist $t \in [0, 2\pi]$.

Für $\omega = -1, r = 0.25$ ergibt sich eine Ellipse (Abb. 2). Die Kurve ist rot, die zugehörige Evolute blau eingezeichnet. Zusätzlich ist in grün der Einheitskreis angegeben.

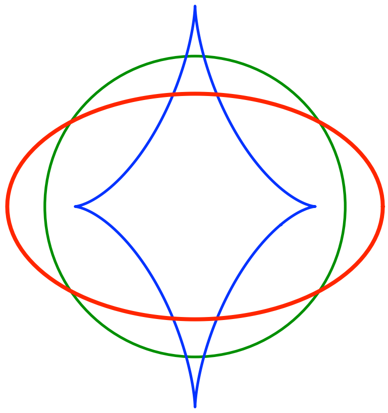

Abb. 2: Ellipse

Für $\omega = 2, r = 0.18$ ergibt sich die Kurve der Abbildung 3.

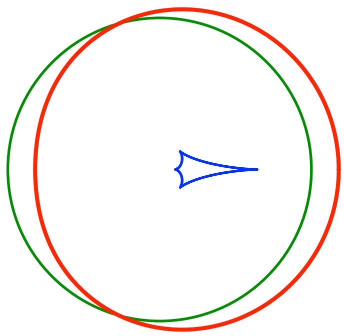

Abb. 3: Nicht ganz rund

Für $\omega = 3, r = 0.08$ ergibt sich die Kurve der Abbildung 4.

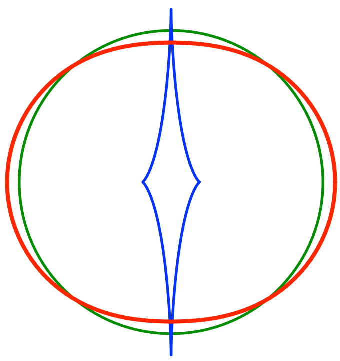

Abb. 4

Für $\omega = 4, r = 0.05$ ergibt sich die Kurve der Abbildung 5.

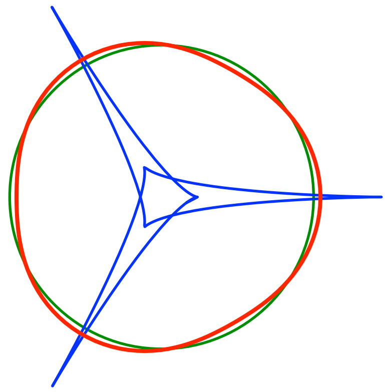

Abb. 5

Die Abbildung 6 zeigt die Krümmung der Kurve der Abbildung 5.

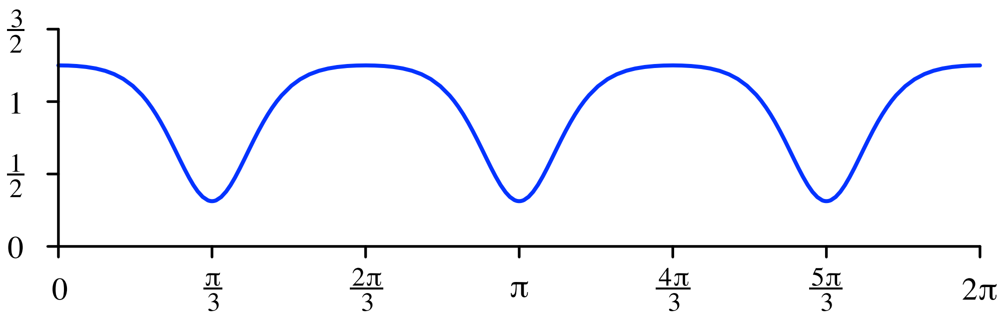

Abb. 6: Krümmung

Die Krümmung ist durchgehend positiv.

3 Grenzfall

Für

$$r = \frac{1}{\omega^2} \tag{3}$$

hat die Krümmung Nullstellen, ohne aber negativ zu werden. Die Kurve ist immer noch konvex.

Beispiel: Für $\omega = 4, r = \frac{1}{16}$ ergibt sich die Kurve der Abbildung 7. Die Evolute hat drei Pole.

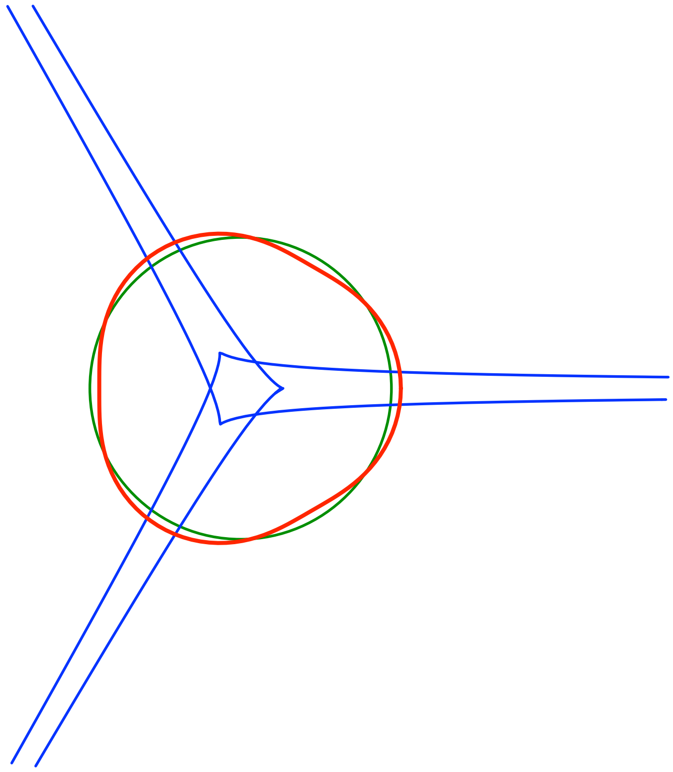

Abb. 7: Grenzfall

Die Abbildung 8 zeigt die Krümmung mit ihren Nullstellen.

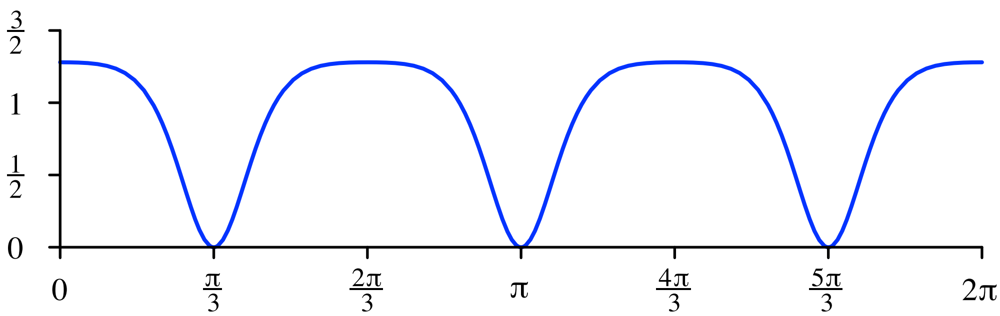

Abb. 8: Krümmung

4 Illustration der Einstiegsbeispiele

Wir illustrieren die drei Beispiele (zwei davon nicht konvex) der Abbildung 1 mit Evolute und Krümmungsgraf.

Die Abbildung 9 zeigt das nichtkonvexe Beispiel der Abbildung 1a zusammen mit deren Evolute. Wie sind deren Pole zu interpretieren?

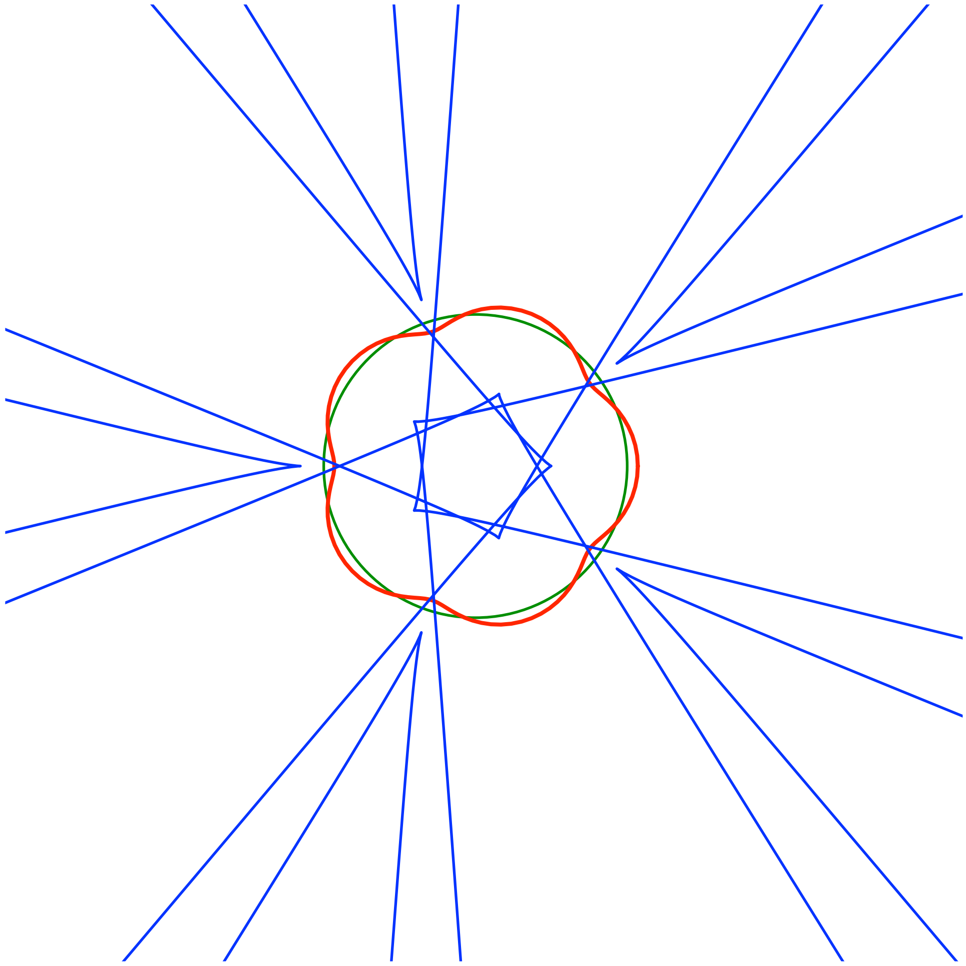

Abb. 9: Beispiel der Abbildung 1a

Die Abbildung 10 zeigt den zugehörigen Krümmungsverlauf.

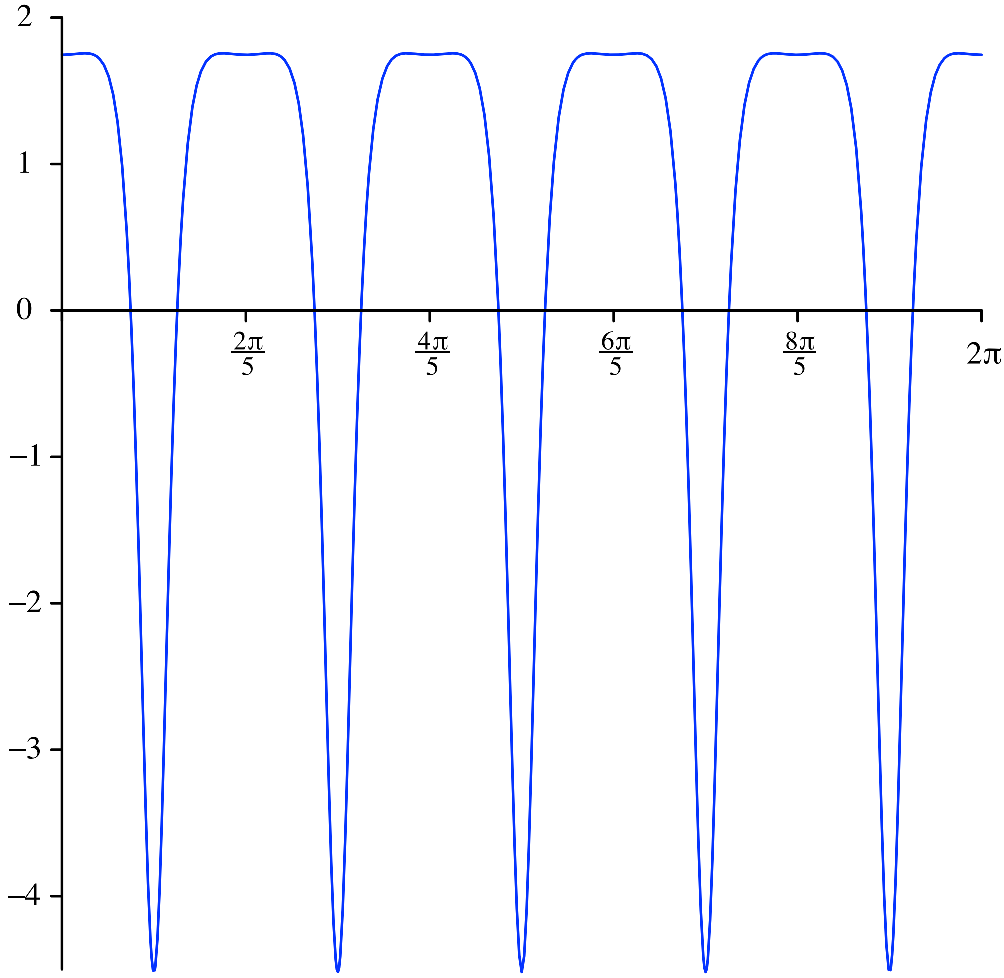

Abb. 10: Krümmung der Abbildung 1a

Die Abbildung 11 zeigt das Beispiel der Abbildung 1b zusammen mit deren Evolute.

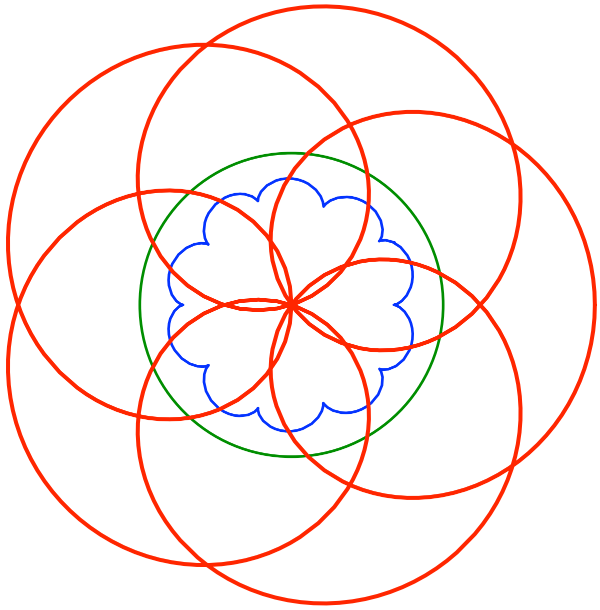

Abb. 11: Beispiel der Abbildung 1b

Die Abbildung 12 zeigt den zugehörigen Krümmungsverlauf.

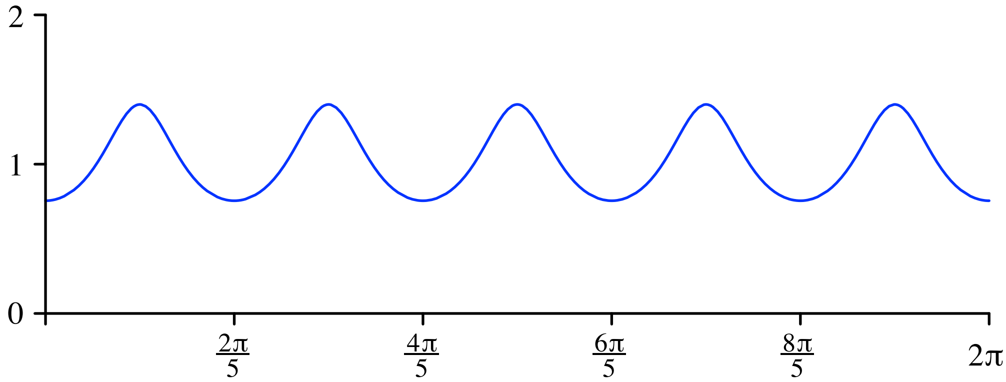

Abb. 12: Krümmung der Abbildung 1b

Die Abbildung 13 zeigt das Beispiel der Abbildung 1c zusammen mit deren Evolute.

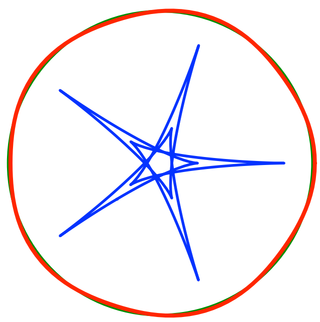

Abb. 13: Beispiel der Abbildung 1c

Die Abbildung 14 zeigt den zugehörigen Krümmungsverlauf.

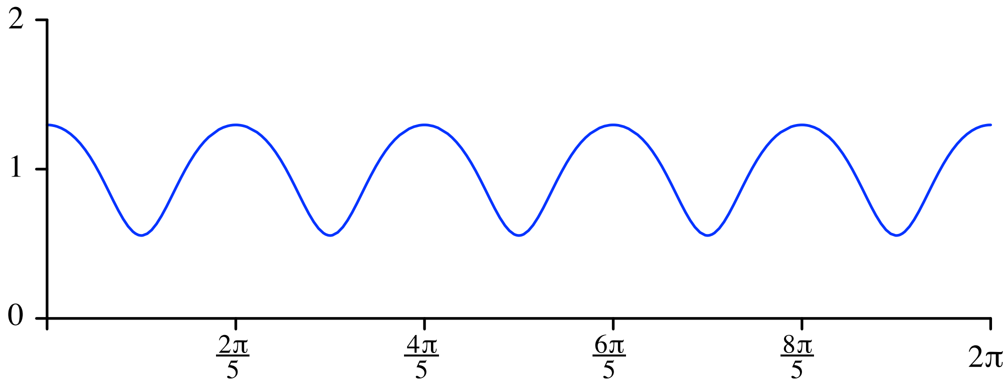

Abb. 14: Krümmung der Abbildung 1c