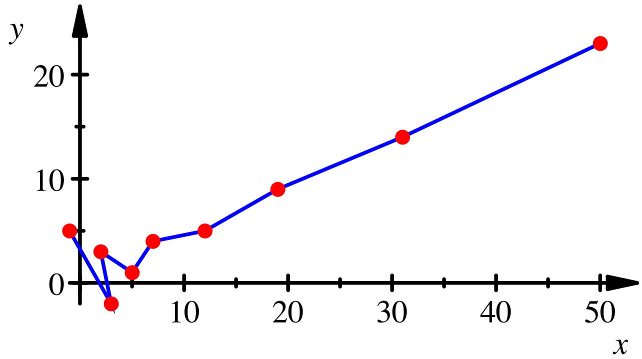
Hans Walser, [20070903b]

Fibonacci-Folge mit komplexen Startwerten

Wenn bei der Fibonacci-Folge mit der Rekursion $z_{n+2} = z_{n+1} + z_n$ komplexe Startwerte verwenden, entsteht in der Gaußschen Ebene eine Punktfolge, welche sich einer Geraden annähert.

So ergibt sich etwa für die Startwerte $z_0 = -1 + 5\mathrm{i}$ und $z_0 = 3 - 2\mathrm{i}$ die folgende Figur:



Komplexe Startwerte

Wie steil ist diese Gerade?

Bearbeitung

Es ist:

$$\begin{aligned}
z_0 &= z_0 \\
z_1 &= z_1 \\
z_2 &= z_0 + z_1 \\
z_3 &= z_0 + 2z_1 \\
z_4 &= 2z_0 + 3z_1 \\
z_5 &= 3z_0 + 5z_1 \\
&\vdots \\
z_n &= f_{n-1}z_0 + f_n z_1
\end{aligned}$$

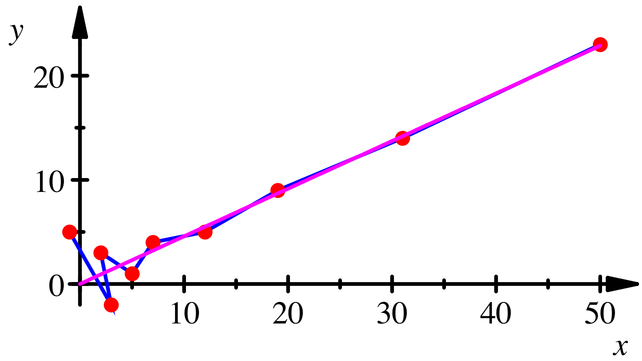
Dabei ist f_n die gewöhnliche reelle Fibonacci-Folge.

Für $n \gg 0$ ist $f_n \approx \tau f_{n-1}$ mit $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (goldener Schnitt). Für $n \gg 0$ ist also bei Startwerten $z_0 = p + q\mathrm{i}$ und $z_1 = r + s\mathrm{i}$:

$$z_n = f_{n-1}z_0 + f_n z_1 \approx f_{n-1}\left(z_0 + \tau z_1\right) = f_{n-1}\left(\left(p + \tau r\right) + \mathrm{i}\left(q + \tau s\right)\right)$$

Da f_{n-1} reell ist, erhalten wir für z_n das Argument $\tan\left(\arg\left(z_n\right)\right) \approx \frac{q+\tau s}{p+\tau r}$. Die Steigung der gesuchten Geraden ist somit $\frac{q+\tau s}{p+\tau r}$.

Für die Startwerte $z_0 = -1 + 5\mathrm{i}$ und $z_0 = 3 - 2\mathrm{i}$ ergibt sich die Geradensteigung $\frac{5-2\tau}{-1+3\tau} \approx 0.4576$.



Mit Gerade