Hans Walser, [20170416]

Kollineare Punkte

1 Der Satz

Zu einem beliebigen Dreieck zeichnen wir den Umkreis (Abb. 1).

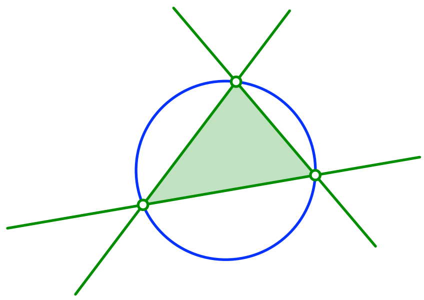

Abb. 1: Umkreis

In den Dreiecksecken zeichnen wir die Tangenten an den Umkreis (Abb. 2).

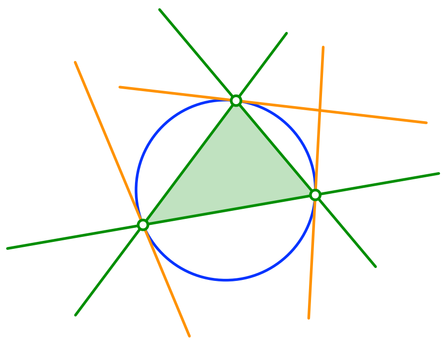

Abb. 2: Tangenten in den Eckpunkten

Wir schneiden jede Tangente mit der dem Berührungspunkt gegenüberliegenden Dreiecksseite (oder deren Verlängerung) (Abb. 3).

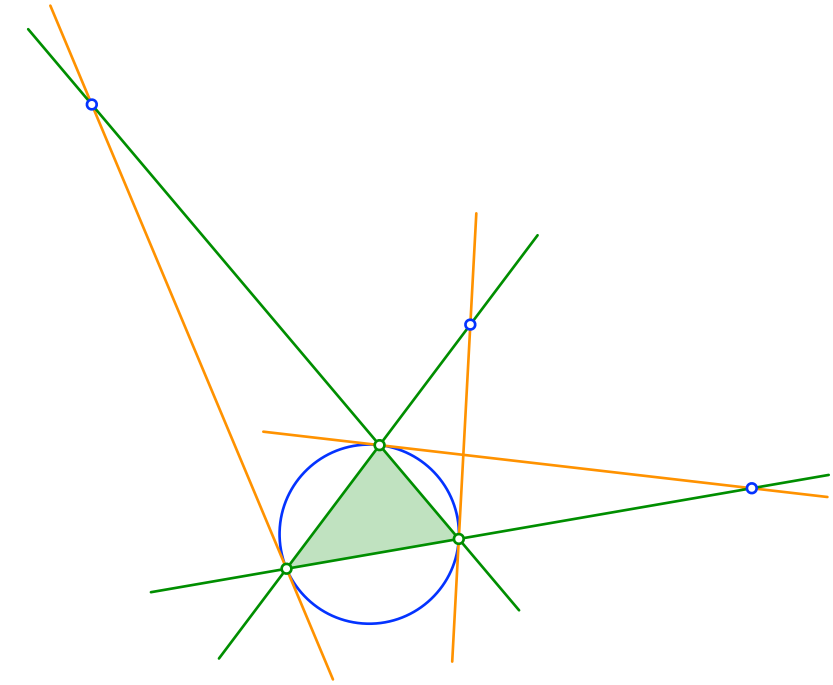

Abb. 3: Schnittpunkte

Die drei Schnittpunkte liegen auf einer Geraden (Abb. 4).

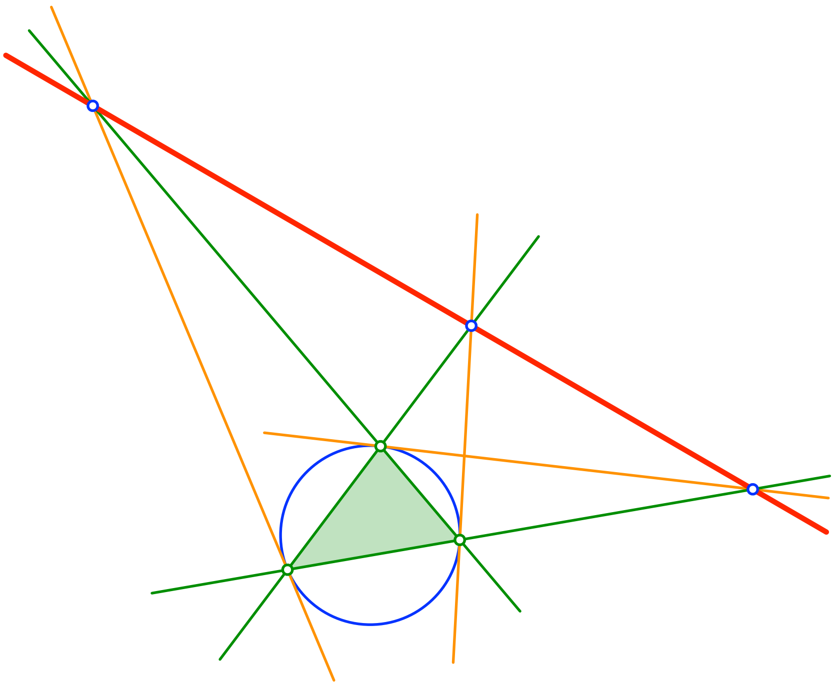

Abb. 4: Kollineare Punkte

2 Der Beweis

Der Satz ist ein Sonderfall des Satzes von Pappos-Pascal.

Der beim Satz von Pappos-Pascal benötigte Kegelschnitt ist der Umkreis des Dreiecks, und je zwei der beim Satz von Pappos-Pascal vorkommenden sechs Punkte auf dem Kegelschnitt sind identifiziert, so dass deren Verbindungsgerade zur Tangente an den Kegelschnitt wird.

3 Fragen

Gibt es einen elementargeometrischen Beweis ohne projektive Geometrie?

Ist der Pol der roten Geraden bezüglich des Umkreises ein „besonderer Punkt" im Dreieck? (vergleiche Abschnitt 5)

Wie ist es beim gleichseitigen Dreieck?

4 Umgekehrt ist auch gefahren

In einem beliebigen Dreieck zeichnen wir den Inkreis (Abb. 5).

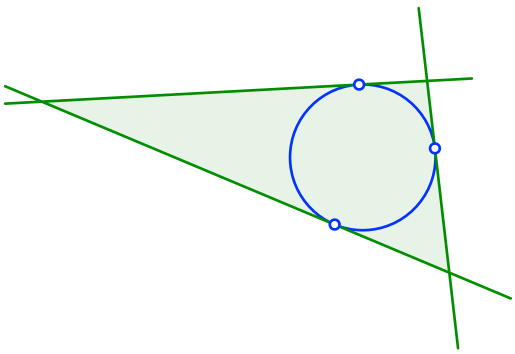

Abb. 5: Inkreis

Die Berührpunkte des Inkreises bilden ein Dreieck (Abb. 6).

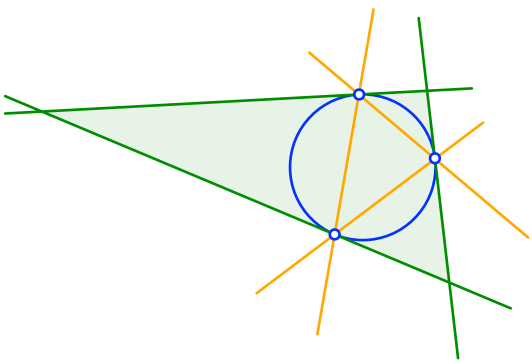

Abb. 6: Berührpunktdreieck

Wir schneiden die Seiten des Ausgangsdreiecks mit den Seiten des Berührpunktdreiecks gemäß Abbildung 7.

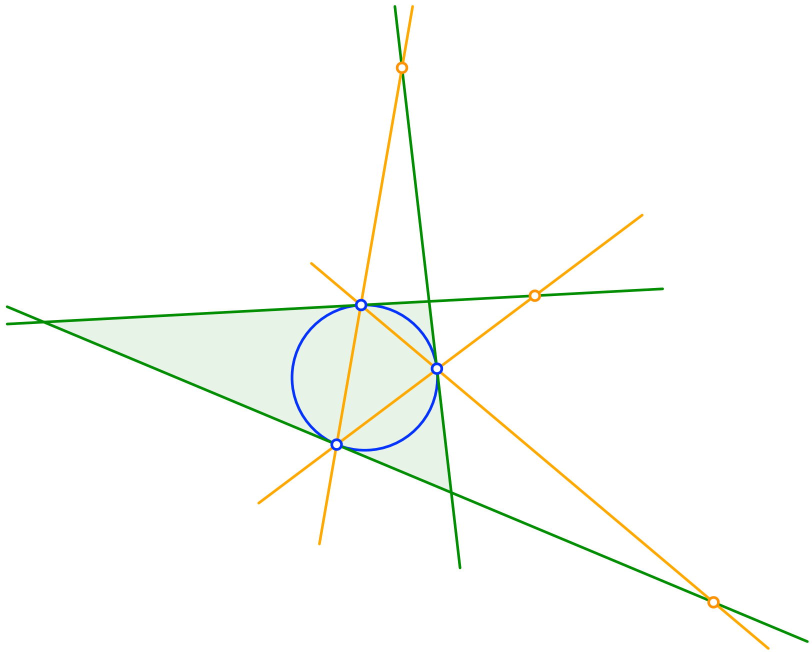

Abb. 7: Schnittpunkte

Die drei Schnittpunkte sind kollinear (Abb. 8).

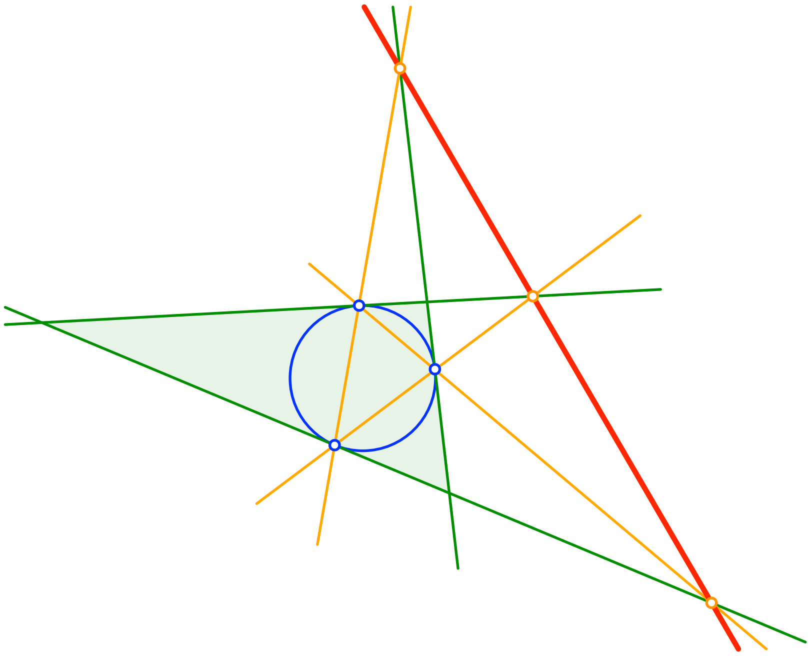

Abb. 8: Kollineare Punkte

Die Figuren der Abbildungen 4 und 8 sind äquivalent.

5 Der Pol als „besonderer Punkt“

Wir zeichnen den Pol der roten Geraden bezüglich des blauen Inkreises (Abb. 9).

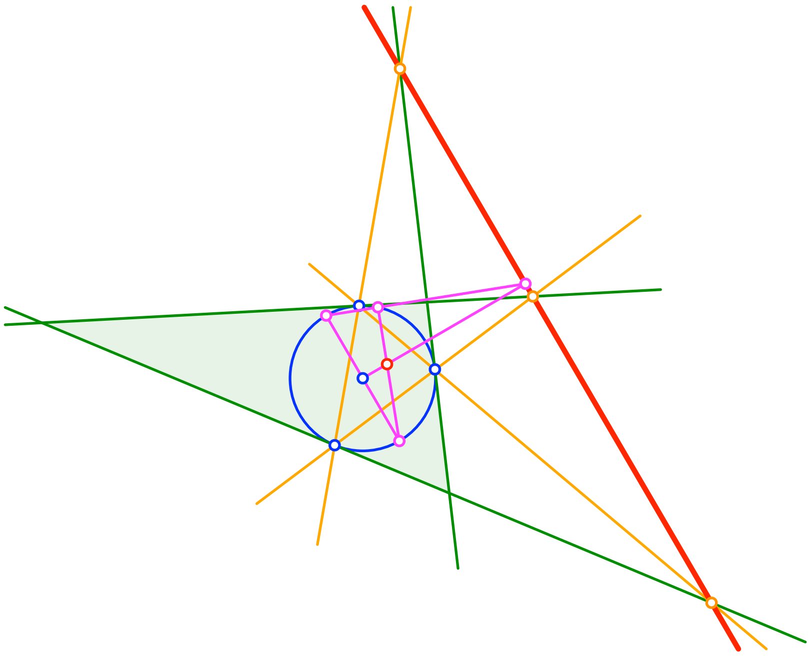

Abb. 9: Pol

Andererseits zeichnen wir die Ecktransversalen des grünen Dreiecks zu den Berührungspunkten des Inkreises (Abb. 10). Diese Ecktransversalen sind kopunktal. Dies kann mit dem Satz von Ceva gezeigt werden.

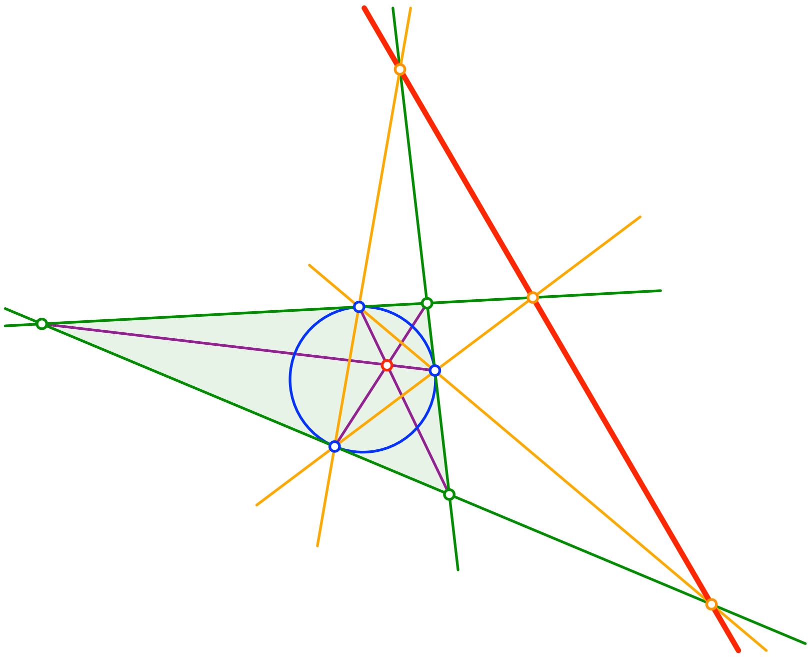

Abb. 10: Transversalenschnittpunkt.

Der Transversalenschnittpunkt ist der Pol (Abb. 11). Mit DGS verifiziert.

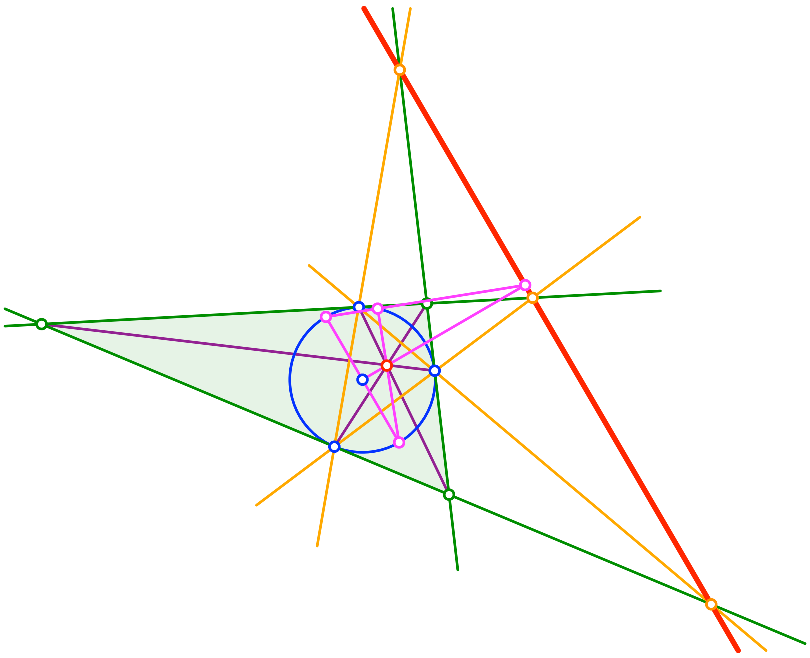

Abb. 11: Der Transversalenschnittpunkt ist der Pol