Hans Walser, [20180415]

Knacknuss ohne Nussknacker

1 About

Spiel mit der vierten Dimension.

2 Das Problem

Die Abbildung 1 zeigt drei Nüsse in je zwei Ansichten.

a) b) c)

Abb. 1: Drei Nüsse

Die Nuss a) ist eine normale Nuss mit zweiteiliger Symmetrie. Die Nuss b) hat eine dreiteilige Symmetrie, die Nuss c) gar eine vierteilige Symmetrie.

Die Frage ist, ob die Kerne ebenfalls die entsprechenden Symmetrien aufweisen. Um dies festzustellen, müsste man die Nüsse knacken. Dadurch wird aber die Nussschale zerstört.

Wie erhalten wir den Nusskern, ohne die Nuss zu knacken?

3 In der Ebene

Die Abbildung 2 illustriert das zweidimensionale Analogon. Die Nussschale ist durch einen Kreisring modelliert:

$$\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \qquad (1)$$

Der Kern ist durch eine Kreisscheibe modelliert:

$$x^2 + y^2 \leq \left(\tfrac{5}{8}\right)^2 \qquad (2)$$

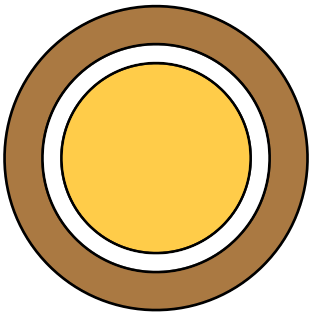

Abb. 2: In der Ebene

Es ist nicht möglich, in der Ebene den Kern herauszuholen, ohne die Schale aufzubrechen.

4 Einbettung in den Raum

Hingegen können wir dies im Raum bewerkstelligen. Dazu müssen wir allerdings die Situation in den Raum einbetten:

Aus (1) wird für die Nussschale:

$$\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \quad \wedge \quad z = 0 \qquad (3)$$

Aus (2) wird für den Kern:

$$x^2 + y^2 \leq \left(\tfrac{5}{8}\right)^2 \quad \wedge \quad z = 0 \qquad (4)$$

Die z-Achse wird beschrieben durch:

$$x = 0 \quad \wedge \quad y = 0 \qquad (5)$$

Die Bedingungen (3) und (5) schließen sich aus. Die Bedingungen (4) und (5) haben den Ursprung als gemeinsamen Punkt. Wir können also im Raum („von oben her") in die Nussschale hineingreifen und den Kern herausnehmen, ohne die Nussschale zu berühren oder gar zu zerstören (Abb. 3).

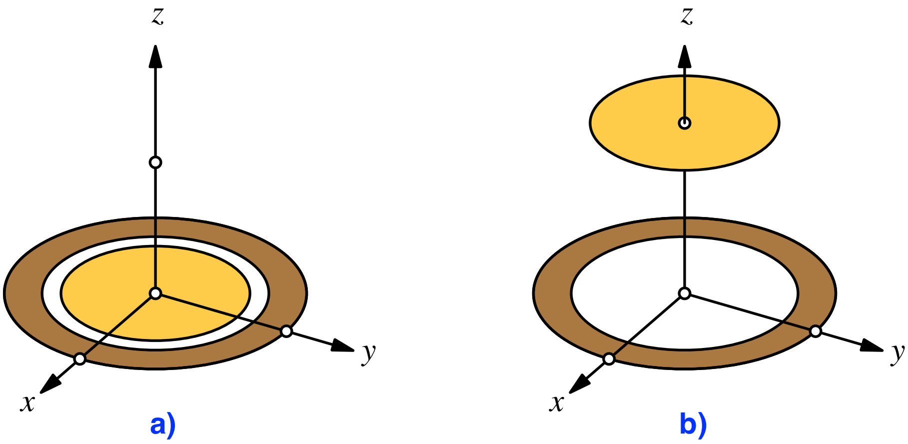

Abb. 3: Einbettung in den Raum

5 Überlegung im 4d-Raum

Wir übertragen dieses Vorgehen in den vierdimensionalen Hyperraum.

Die Nussschale modellieren wir als 3d-Kugelschale:

$$\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad \wedge \quad w = 0 \tag{6}$$

Den Kern modellieren wir als 3d-Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \left(\tfrac{5}{8}\right)^2 \quad \wedge \quad w = 0 \tag{7}$$

Die w-Achse wird beschrieben durch:

$$x = 0 \quad \wedge \quad y = 0 \quad \wedge \quad z = 0 \tag{8}$$

Wir können also entlang der w-Achse in die Nussschale hineingreifen und den Kern herausholen, ohne die Nussschale zu berühren oder gar zu zerstören.

So einfach ist das.