Hans Walser, [20160811]

Kettenlinie

Anregung: (Blåsjö 2016)

1 Worum geht es?

Eine Kette gegebener Länge wird an zwei gleich hoch liegenden Punkten aufgehängt. Wie können die beiden Aufhänge-Punkte verändert werden, ohne dass sich die Position des Scheitels (tiefster Punkt) der Kettenlinie verändert?

Die Abbildung 1 zeigt drei Positionsbeispiele.

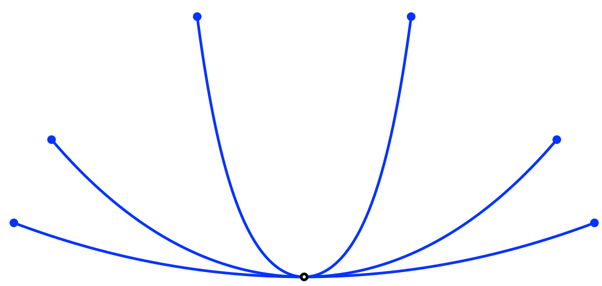

Abb. 1: Drei Kettenlinien gleicher Länge

2 Die Kettenlinie

Die Kettenlinie (Seilkurve, Kateonoide, engl: catenary) wird im Standardfall durch den Funktionsgrafen der Funktion

$$y = f(x) = \cosh(x) \tag{1}$$

beschrieben (Abb. 2). Diese Kettenlinie kann auch als Parameterkurve dargestellt werden:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \cosh(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

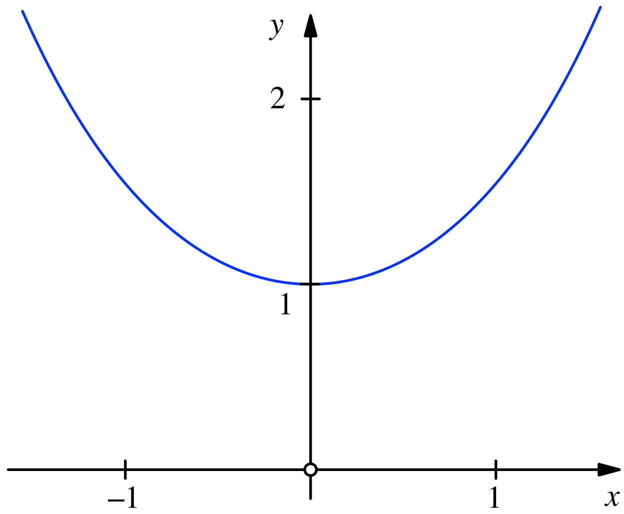

Abb. 2: $y = \cosh(x)$

Die Bearbeitung der Kettenlinie geht auf Christiaan Huygens (1629-1695), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) und Johann Bernoulli (1667-1748) zurück.

Didaktisches: Die Kettenlinie ist von der quadratischen Parabel zu unterscheiden. Trotzdem wird in schulischen Arbeitsblättern die durchhängende Kette gelegentlich durch eine Parabel „modelliert". Das ist aber nur eine Modellierung des äußeren Scheins, keine Modellierung des physikalischen Hintergrundes.

3 Bogenlänge der Kettenlinie

Die Kettenlinie ist eine der wenigen Kurven, deren Bogenlänge sehr einfach zu berechnen ist. Zunächst ist:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x) = \sinh(x) \tag{3}$$

Man beachte die gegenüber den Kreisfunktionen abweichenden Vorzeichen.

In der Parameterdarstellung lautet die Ableitung:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Für das Bogenelement ds erhalten wir:

$$\mathrm{d}s = \left|\dot{\vec{x}}(t)\right|\mathrm{d}t = \sqrt{1+\sinh^2(t)}\,\mathrm{d}t = \cosh(t)\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

Für die Bogenlänge s im Abschnitt $t \in [a,b]$ ergibt sich daraus:

$$s\big|_a^b = \int_a^b \mathrm{d}s = \int_a^b \cosh(t)\,\mathrm{d}t = \sinh(b) - \sinh(a) \tag{6}$$

4 Symmetrische Kettenlinie durch den Ursprung

Für unsere Aufgabe setzen wir die konstante Kettenlänge auf 2.

Die Kettenlinie zeichnen wir durch den Ursprung, das heißt wir arbeiten mit der Darstellung:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \cosh(t) - 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [-b,b] \tag{7}$$

Auf die Bogenlänge hat das keinen Einfluss, da der Zusatz -1 beim Ableiten wegfällt. Die Aufhänge-Punkte sind symmetrisch zur y-Achse. Für $t \in [-b,b]$ erhalten wir die Bogenlänge:

$$s\big|_{-b}^{b} = \sinh(b) - \sinh(-b) = 2\sinh(b) \tag{8}$$

Diese Länge sollte nun 2 sein. Um dies zu erreichen, strecken wir die Kettenlinie vom Ursprung aus mit dem Faktor $\frac{1}{\sinh(b)}$.

Wir erhalten so für jeden Parameterwert $b > 0$ eine Kettenlinie

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{t}{\sinh(b)} \\ \frac{\cosh(t)-1}{\sinh(b)} \end{bmatrix}, \quad t \in [-b,b] \tag{9}$$

mit der Länge 2, welche durch den Ursprung verläuft.

Für die Parameterwerte $b \in \left\{\frac{1}{\mathrm{e}}, 1, \mathrm{e}\right\}$ ergeben sich die drei Beispiele der Abbildung 1.

5 Aufhänge-Punkte

Für den Parameter $b > 0$ ergeben sich aus (9) für die Aufhänge-Punkte der Kettenlinie die Koordinaten:

$$\left(\frac{-b}{\sinh(b)}, \frac{\cosh(-b)-1}{\sinh(b)}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{b}{\sinh(b)}, \frac{\cosh(b)-1}{\sinh(b)}\right) \tag{10}$$

Somit können sich die linken beziehungsweise rechten Aufhänge-Punkte auf folgenden Kurven bewegen (Abb. 3):

$$\vec{x}_{\text{links}}(b) = \begin{bmatrix} \frac{-b}{\sinh(b)} \\ \frac{\cosh(-b)-1}{\sinh(b)} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_{\text{rechts}}(b) = \begin{bmatrix} \frac{b}{\sinh(b)} \\ \frac{\cosh(b)-1}{\sinh(b)} \end{bmatrix}; \quad b \in (0,\infty) \tag{11}$$

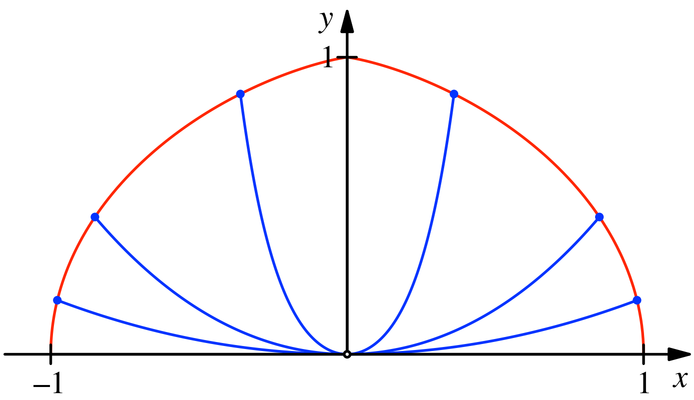

Abb. 3: Bahnkurven der Aufhänge-Punkte

Der Autor weiß nicht, wie diese Kurven heißen. Die Abbildung 4 zeigt die Kurven als solche.

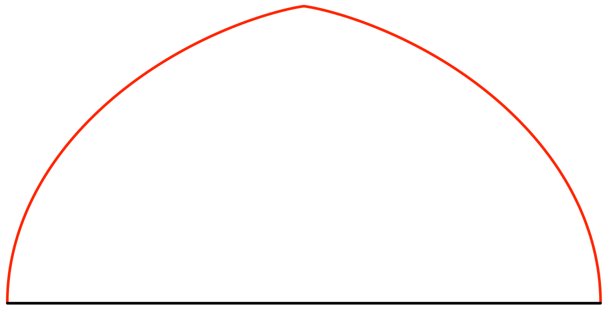

Abb. 4: Das Tor zur Kettenlinie

6 Grenzfälle

6.1 Gestreckter Fall

Für $b \to 0$ streben die beiden Aufhänge-Punkte gegen $(-1,0)$ beziehungsweise $(1,0)$. Die Kettenlinie wird gestreckt, wenigsten theoretisch. Wegen der Elastizität des Materials wird sie trotzdem ein bisschen durchhängen.

6.2 Schlaufe

Für $b \to \infty$ streben beide Aufhänge-Punkte gegen $(0,1)$. Wir erhalten eine Schlaufe mit Umkehrpunkt im Ursprung.

7 Bildergalerie

Die Fotos (Abb. 5) zeigen reale Beispiele mit Großmutters Goldkettchen.

Vorgehen: In Abbildung 4 Basislinie auf die Länge des Kettchens (49.8cm) skalieren. Niveaulinien zur horizontalen Orientierung einzeichnen. Der Drucker braucht drei DIN A4-Papiere. Diese auf Stoß zusammenkleben und mit Magneten an die Kühlschranktüre montieren. Bei zwei Magneten mit einer Zentralbohrung entsprechend dicke Drahtstifte einführen und dort das Kettchen aufhängen.

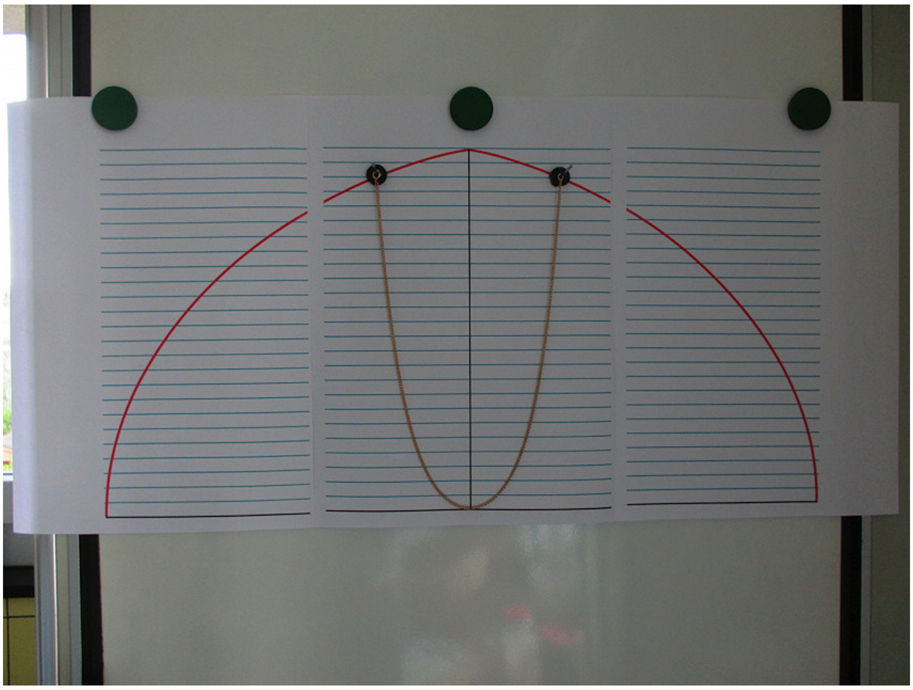

Abb. 5.1: Position 1

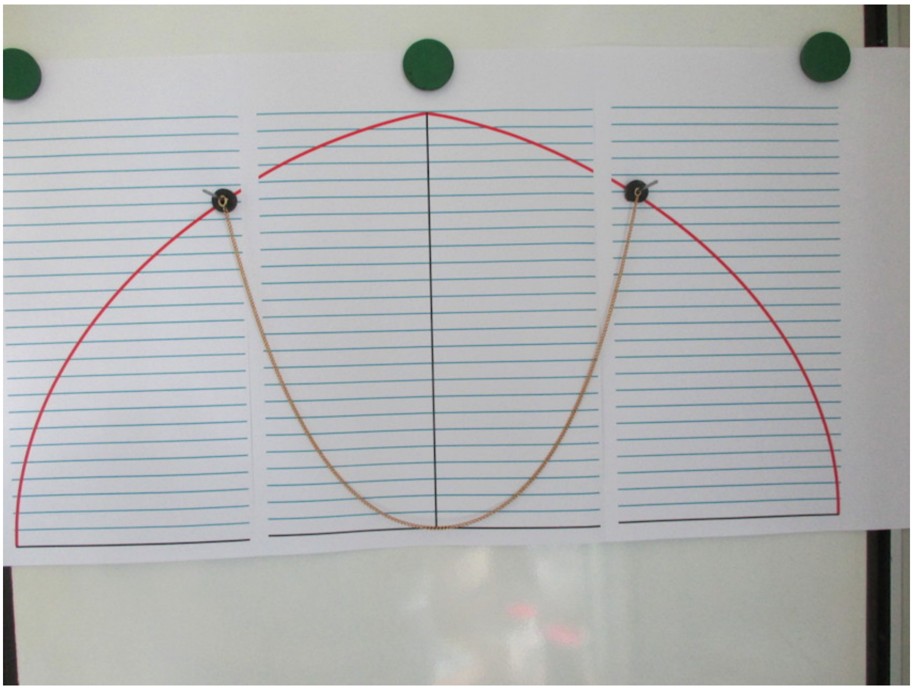

Abb. 5.2: Position 2

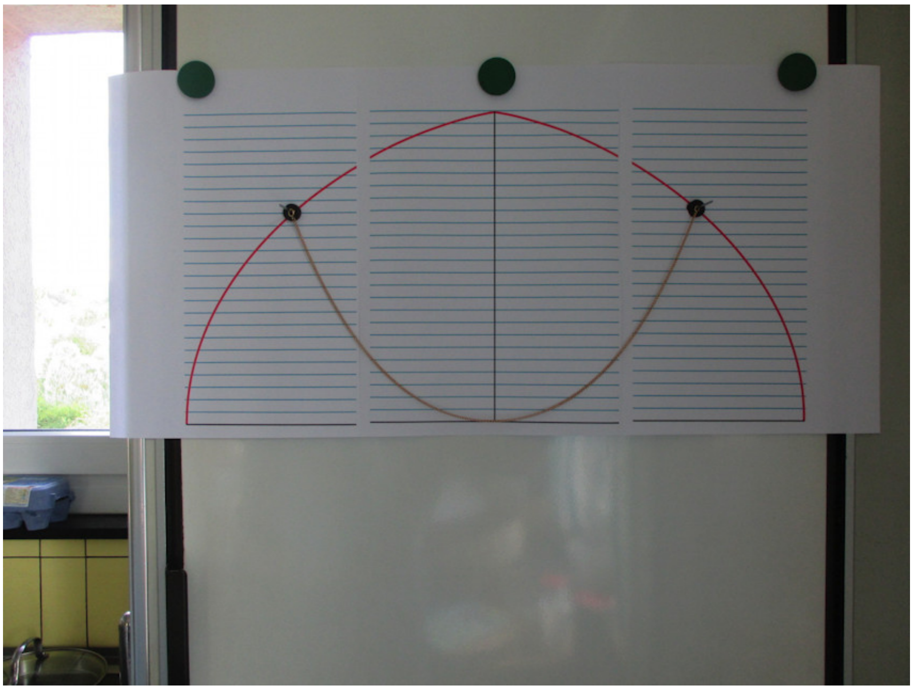

Abb. 5.3: Position 3

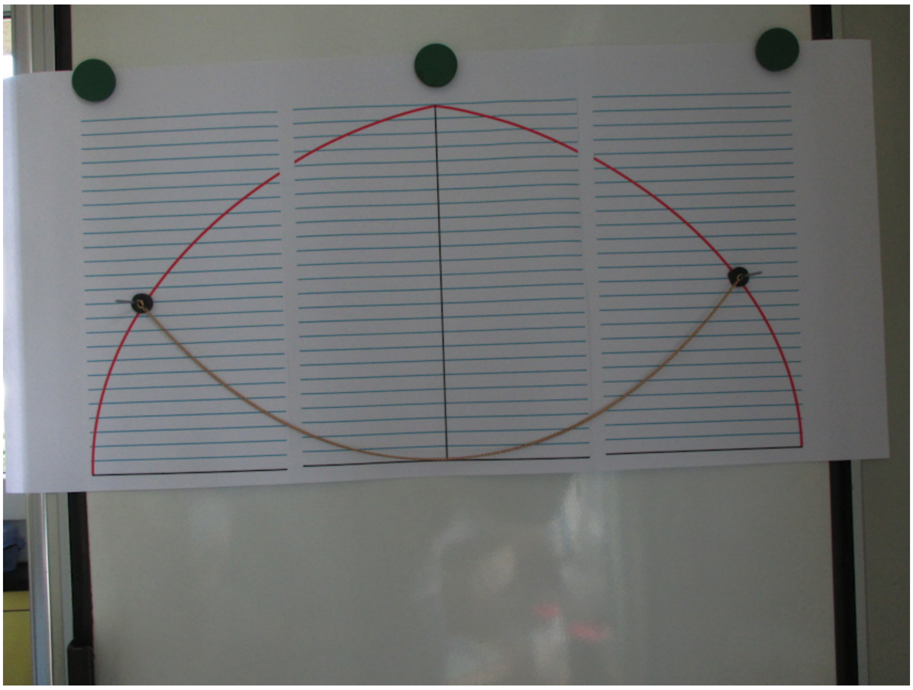

Abb. 5.4: Position 4

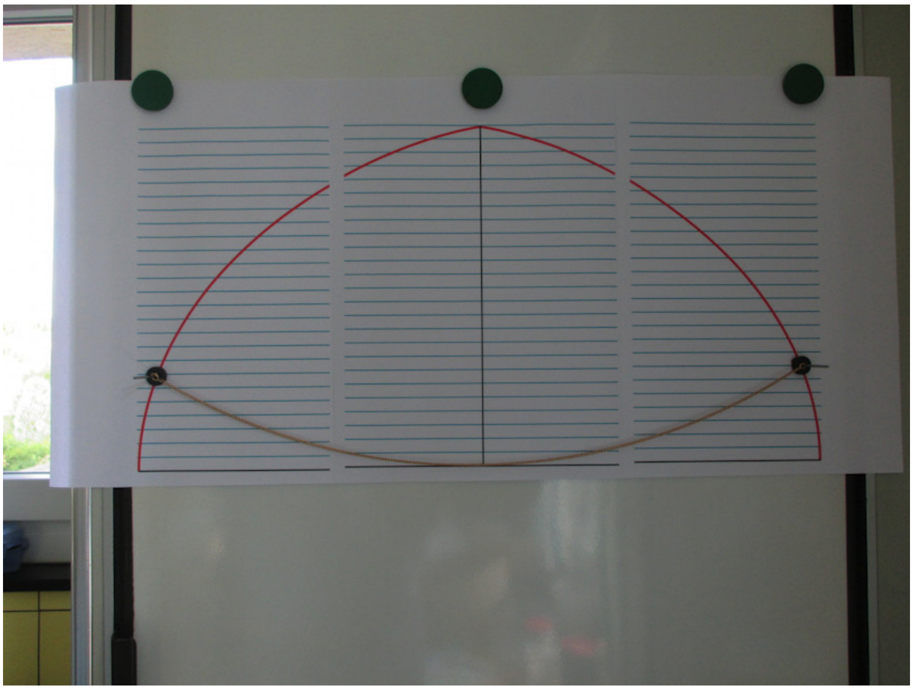

Abb. 5.5: Position 5

Literatur

Blåsjö, Viktor (2016): How to Find the Logarithm of Any Number Using Nothing But a Piece of String. The College Mathematics Journal. Vol. 47, No. 2, March 2016, 95-100.