Hans Walser, [20090626a]

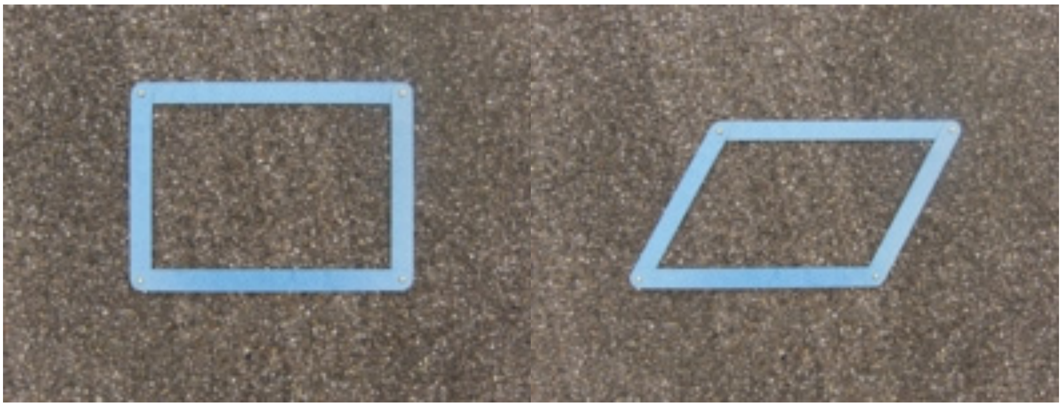
Kehrzahl aus Gelenkmodell

1 Worum es geht

Wir untersuchen ein Gelenkmodell, das zu einer Zahl deren Kehrzahl liefert. Es entstehen Trapeze, insbesondere das goldene Trapez, welches die Zahlen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ sowie $\sqrt{5}$ in der Form des goldenen Schnittes enthält.

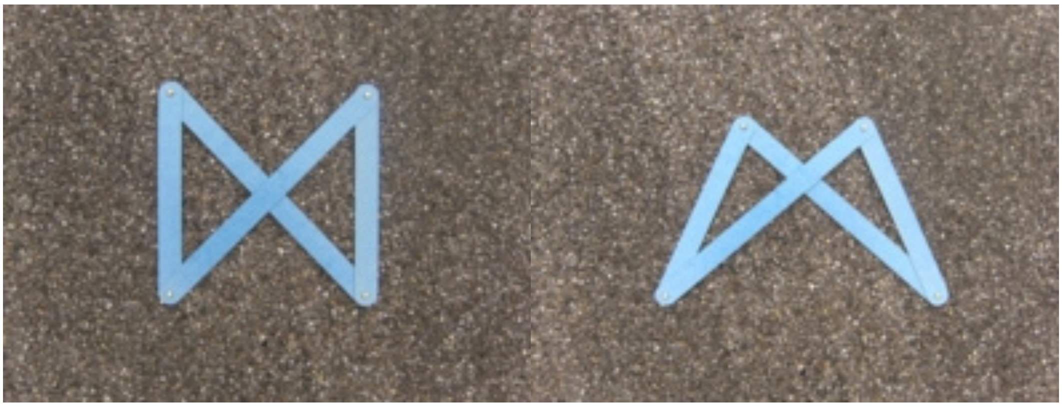
2 Das Gelenkmodell

Das Gelenkmodell besteht aus je zwei Stäben der Länge eins und $\sqrt{2}$, die wechselseitig an den Enden gelenkig verbunden sind. Damit können ein Rechteck im DIN-Format gebildet werden, oder Parallelogramme mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2}$.



DIN-Rechteck und Parallelogramm

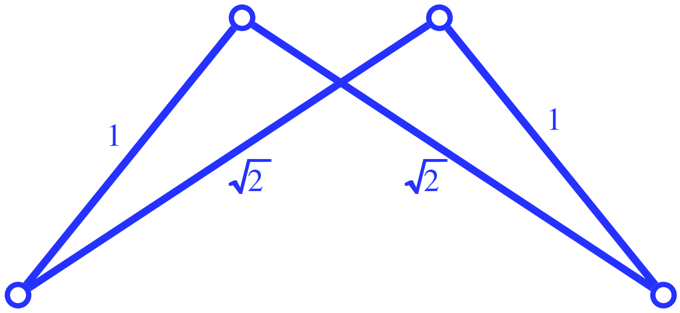
Wir können die Stäbe der Länge $\sqrt{2}$ aber auch überkreuzen. So können wir als Sonderfall das Quadrat bilden oder allgemein ein gleichschenkliges Trapez.



Quadrat und Trapez

Damit das Modell beweglich bleibt, darf die Überkreuzungsstelle nicht fixiert werden.

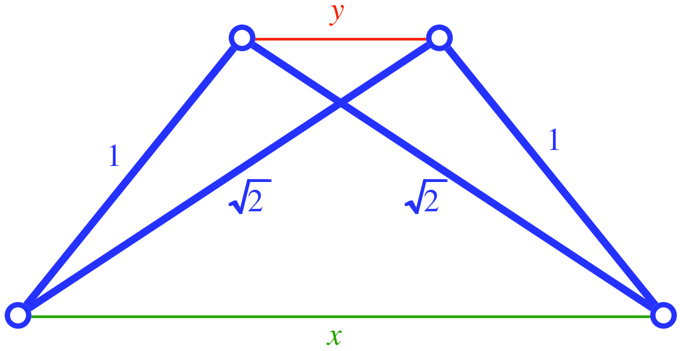
Wir werden nun diese gleichschenkligen Trapeze untersuchen.



Das Gelenkmodell

3 Die Parallelseiten

Wir fragen zunächst, wie sich die Längen der beiden Parallelseiten des gleichschenkligen Trapezes zueinander verhalten.

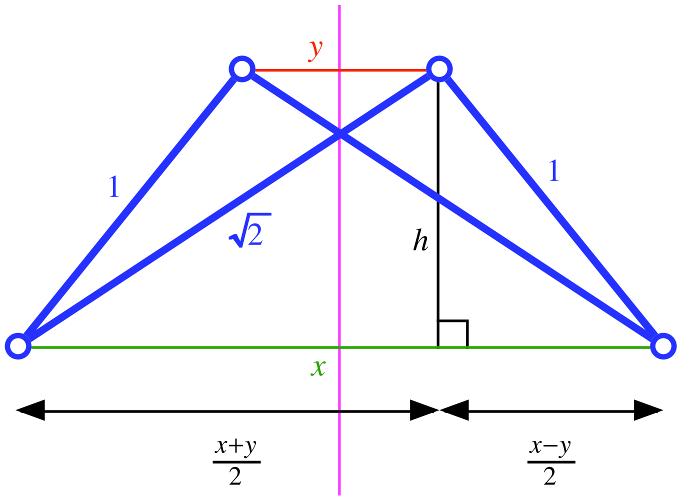


Parallelseiten

Gesucht ist also die Funktion $y(x)$.

4 Die Rechnung

Wir zeichnen die Symmetrieachse des Trapezes sowie eine Höhe gemäß Figur ein.



Symmetrieachse und Höhe

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$h^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2$$
$$h^2 = 1^2 - \left(\tfrac{x-y}{2}\right)^2$$

Daraus erhalten wir:

$$2 - \left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2 = 1 - \left(\tfrac{x-y}{2}\right)^2$$
$$1 = \left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{x-y}{2}\right)^2$$
$$1 = xy$$
$$y(x) = \tfrac{1}{x}$$

Somit ist y die Kehrzahl von. Die durch das Gerät definiert Funktion $y(x) = \frac{1}{x}$ hat den Definitionsbereich $x \in \left[\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1\right]$.

5 Sonderfälle

5.1 Quadrat

Der Sonderfall des Quadrates wurde schon erwähnt. Das Quadrat hat den kleinsten Umfang und die größte Fläche im Vergleich zu den anderen Trapezen.

Allgemein hat das Trapez den Umfang:

$$u(x) = 2 + x + \tfrac{1}{x}$$

Diese Funktion hat ihr Minimum bei $x = 1$.

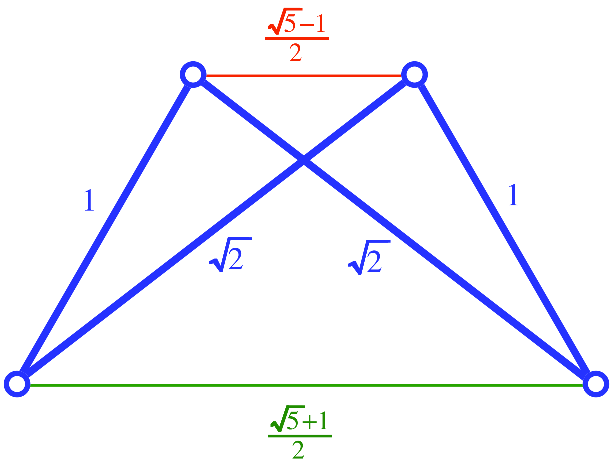
Für den Flächeninhalt Φ verwenden wir den Schnittwinkel ε zwischen den Diagonalen. Der Flächeninhalt eines Viereckes ist allgemein die Hälfte des Produktes der beiden Diagonalen mit dem Sinus des Zwischenwinkels. In unserem Fall wird:

$$\Phi(\varepsilon) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sin(\varepsilon) = \sin(\varepsilon)$$

Das Maximum ist für $\varepsilon = 90°$, also für das Quadrat.

5.2 Goldenes Trapez

Für $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ist $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (goldener Schnitt); wir erhalten das so genannte *goldene Trapez*.



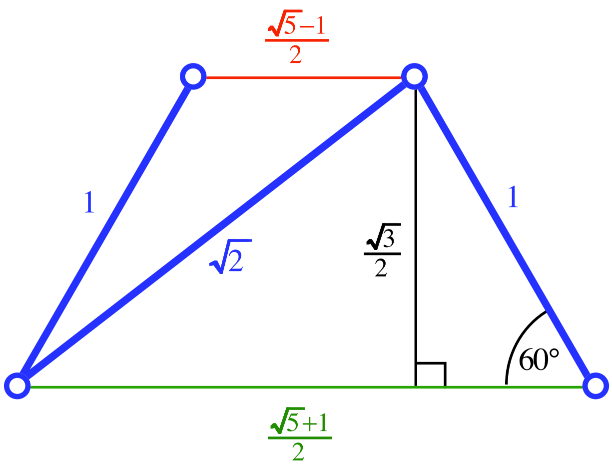
Goldenes Trapez

Wegen $x - y = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$ erhalten wir für das goldene Trapez die Höhe:

$$h^2 = 1^2 - \left(\tfrac{x-y}{2}\right)^2 = 1^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Das ist die Höhe im regulären Einheitsdreieck. Wir können dieses geeignet ins goldene Trapez einpassen. Das goldene Trapez hat also die Basiswinkel 60°.



Maße und Winkel im goldenen Trapez

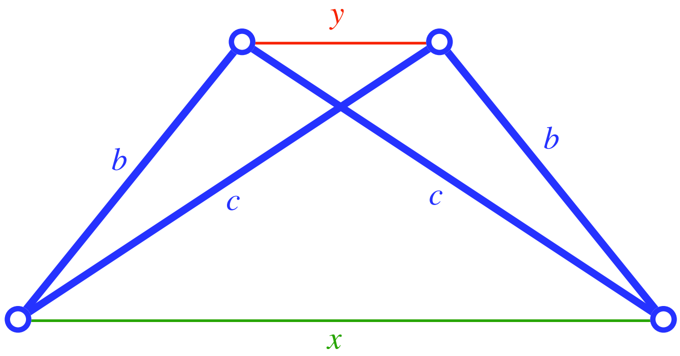
Das goldene Trapez ist wohl die einfachste Figur, welche $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ enthält. Dies ist umso verblüffender, als $\sqrt{2}$ vor allem in der Geometrie des Quadrates auftritt, $\sqrt{3}$ in der Geometrie des regulären Dreieckes und $\sqrt{5}$ in der Form des goldenen Schnittes in der Geometrie des regulären Fünfeckes. Diese Figuren „beißen“ sich aber.

Dreieck und Fünfeck lassen sich nicht in den Quadratraster einfügen, und Quadrat und Fünfeck lassen sich nicht in den Dreiecksraster einfügen.

6 Verallgemeinerung

Wir wählen die Längen der Stäbe b und c mit $b < c$. Damit können wir als Sonderfall ein Rechteck mit den Seiten a und b mit $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ bilden.

Für das gleichschenklige Trapez fragen wir nach dem Zusammenhang der Längen der beiden Parallelseiten.



Verallgemeinerung

Nach Einführen der Höhe h gilt:

$$h^2 = c^2 - \left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2$$

$$h^2 = b^2 - \left(\tfrac{x-y}{2}\right)^2$$

Daraus erhalten wir:

$$c^2 - \left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2 = b^2 - \left(\tfrac{x-y}{2}\right)^2$$

$$c^2 - b^2 = \left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{x-y}{2}\right)^2$$

$$c^2 - b^2 = xy$$

$$y(x) = \tfrac{c^2 - b^2}{x} = \tfrac{a^2}{x}$$

Im Prinzip wieder eine Kehrwertfunktion.