

Hans Walser, [20180321b]

Kegelstumpfaufgabe

Idee und Anregung: K. H., Gö.

1 Worum geht es?

Eine Kegelstumpf-Aufgabe mit Inkugel führt zum Goldenen Schnitt.

2 Die Aufgabe

Ein Kegelstumpf soll die Einheitskugel als Inkugel haben und das doppelte Volumen der Einheitskugel.

3 Bearbeitung

Die Abbildung 1 zeigt den Achsenschnitt mit Ergänzungen zum Kegel und den nötigen Bezeichnungen.

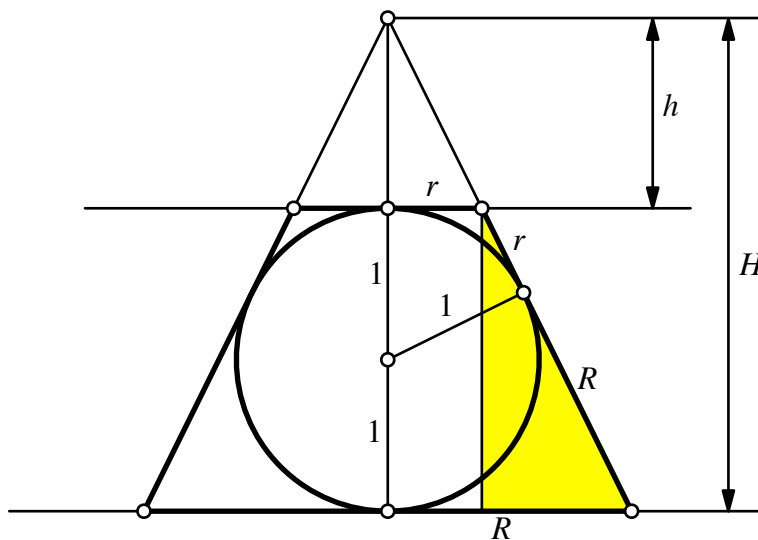


Abb. 1: Disposition und Bezeichnungen

Aus dem gelb markierten rechtwinkligen Dreieck ergibt sich:

$$(R+r)^2 = 2^2 + (R-r)^2 \Rightarrow Rr = 1 \quad (1)$$

Weiter ist:

$$H = R \frac{2}{R-r} \quad , \quad h = r \frac{2}{R-r} \quad (2)$$

Für das Kegelstumpfvolumen V erhalten wir unter Verwendung von (2):

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H - \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{2\pi}{3(R-r)} (R^3 - r^3) = \frac{2\pi}{3} (R^2 + Rr + r^2) \quad (3)$$

Einsetzen von (1) liefert:

$$V = \frac{2\pi}{3} \left(R^2 + 1 + \frac{1}{R^2} \right) \quad (4)$$

Dieses Volumen V soll das Doppelte des Kugelvolumens $\frac{4}{3} \pi$ ausmachen. Daraus ergibt sich die Gleichung:

$$R^2 + 1 + \frac{1}{R^2} = 4 \quad (5)$$

Die biquadratische Gleichung (5) hat die positive Lösung:

$$R = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad (6)$$

Dabei ist Φ der sogenannte Goldene Schnitt (Walser 2013).

Wegen (1) wird:

$$r = \frac{1}{\Phi} \approx 0.618 \quad (7)$$

Die Abbildung 2 zeigt die Lösung.



Abb. 2: Kegelstumpf

Literatur

Walser, Hans (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-937219-85-1.