Hans Walser, [20180321a], [20180405]

Kegelaufgaben

Anregung: A. C., V. und K. H., Gö.

1 Worum geht es

Extremwertaufgaben mit der Kugel um- und einbeschriebenem Kegel. Vergleich mit Kugelvolumen.

2 Umbeschriebener Kegel

2.1 Aufgabe

Der Einheitskugel soll ein Kegel minimalen Volumens umbeschrieben werden.

2.2 Disposition

Die Abbildung 1 zeigt einen Achsenschnitt mit den benötigten Bezeichnungen.

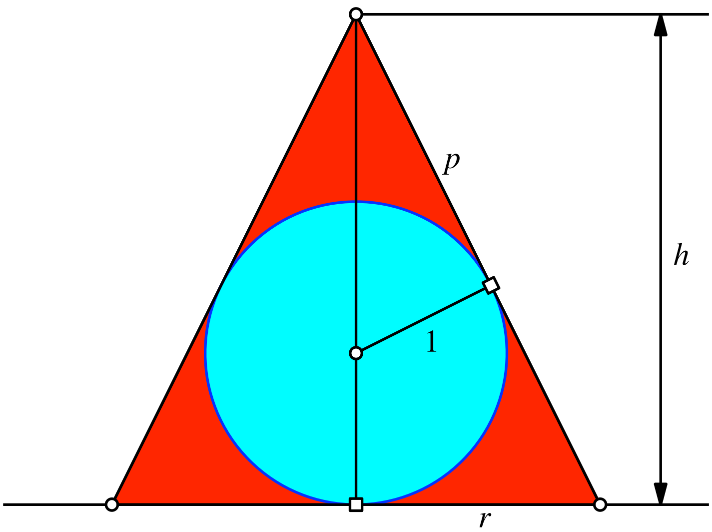

Abb. 1: Achsenschnitt

2.3 Bearbeitung

Wir verwenden die Kegelhöhe h als Parameter der Aufgabe.

Zunächst ist:

$$p(h) = \sqrt{(h-1)^2 - 1} = \sqrt{h^2 - 2h} \tag{1}$$

Weiter ist:

$$\frac{r}{1} = \frac{h}{p} \quad \Rightarrow \quad r(h) = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 2h}} \tag{2}$$

Für das Kegelvolumen V erhalten wir:

$$V(h) = \frac{1}{3} r^2 \pi h = \frac{1}{3} \pi \frac{h^3}{h^2 - 2h} \tag{3}$$

Zur Berechnung des Minimums leiten wir ab:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}(h) = \frac{1}{3} \pi \frac{h^3 (h-4)}{\left(h^2 - 2h\right)^2} \tag{4}$$

Nullsetzen der ersten Ableitung liefert die nichttriviale Lösung $h = 4$. Es ist dann:

$$r(4) = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad V(4) = \frac{8}{3}\pi \tag{5}$$

Das minimale Kegelvolumen ist also das Doppelte des Inkugelvolumens.
Die Abbildung 2 zeigt die Lösung.

Abb. 2: Minimales Kegelvolumen

3 Eingeschriebener Kegel

3.1 Aufgabe

Der Einheitskugel soll ein Kegel maximalen Volumens einbeschrieben werden.

3.2 Disposition

Die Abbildung 3 zeigt einen Achsenschnitt mit den benötigten Bezeichnungen.

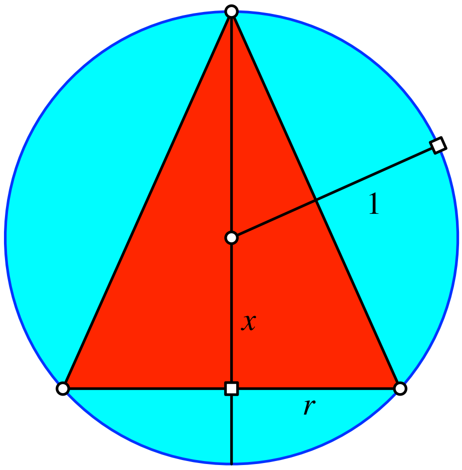

Abb. 3: Achsenschnitt

3.3 Bearbeitung

Wir verwenden x als Parameter der Aufgabe. Zunächst ist:

$$r = \sqrt{1 - x^2} \tag{6}$$

Für das Kegelvolumen V erhalten wir:

$$V(x) = \tfrac{\pi}{3} r^2 (1 + x) = \tfrac{\pi}{3}\left(1 - x^2\right)(1 + x) \tag{7}$$

Zur Berechnung des Maximums leiten wir ab:

$$\tfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x) = \tfrac{\pi}{3}\left(-2x(1 + x) + \left(1 - x^2\right)\right) \tag{8}$$

Nullsetzen der ersten Ableitung liefert für x die nichttriviale Lösung $x = \tfrac{1}{3}$. Es ist dann

$$V\left(\tfrac{1}{3}\right)=\tfrac{32}{81}\pi \quad \text{und} \quad r\left(\tfrac{1}{3}\right)=\tfrac{2}{3}\sqrt{2} \tag{9}$$

Das maximale Kegelvolumen ist $\frac{8}{27}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$ des Kugelvolumens.

Die Abbildung 4 zeigt die Lösung.

Abb. 4: Maximales Kegelvolumen

4 Link mit dem DIN-Format

Die Abbildung 5 zeigt die Achsenschnitte für die Extremlösungen im Vergleich mit dem DIN-Format (Walser 2013).

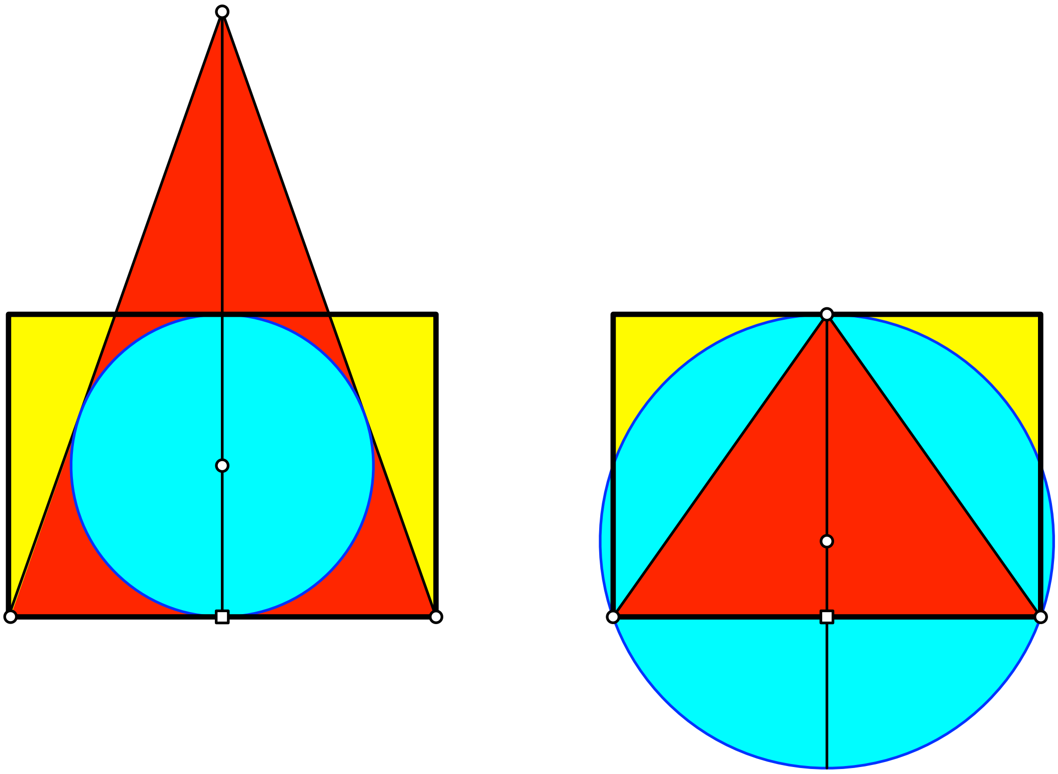

Abb. 5: Link mit dem DIN-Format

Literatur

Walser, H. (2013): *DIN A4 in Raum und Zeit*. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-69-1.