Hans Walser, [20160211]

Kantenschwerpunkt im Viereck

1 Worum geht es?

Es wird eine Konstruktion für den Kantenschwerpunkt im Viereck angegeben. Zudem wird gezeigt, dass genau im Parallelogramm der Kantenschwerpunkt mit dem Eckenschwerpunkt zusammenfällt.

Über Schwerpunkte im Viereck siehe (Fritsch und Pickert, 2014).

2 Bezeichnungen

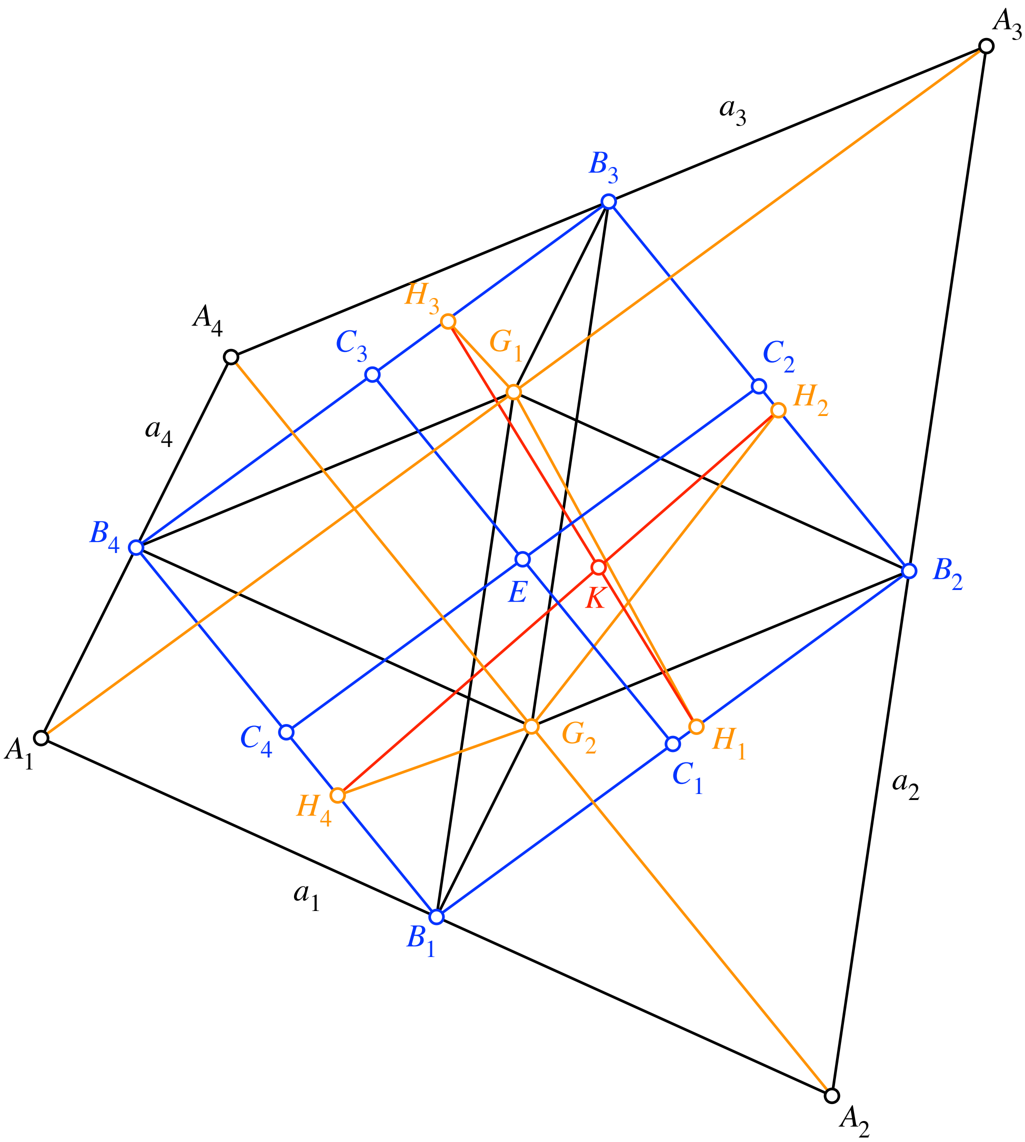

Abb. 1: Bezeichnungen

Die Abbildung 1 zeigt die im Folgenden verwendeten Bezeichnungen.

Das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ hat die Seiten $a_i = \overline{A_iA_{i+1}}$ (Zyklische Indizierung). B_i ist der Mittelpunkt der Strecke a_i . C_i ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{B_iB_{i+1}}$. G_i ist der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{A_iA_{i+2}}$. $H_i, i=1,2$, ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle B_iG_iB_{i+1}$ mit der Geraden B_iB_{i+1}. $H_i, i=3,4$, ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle B_iG_{i-2}B_{i+1}$ mit der Geraden B_iB_{i+1} .

3 Der Kantenschwerpunkt

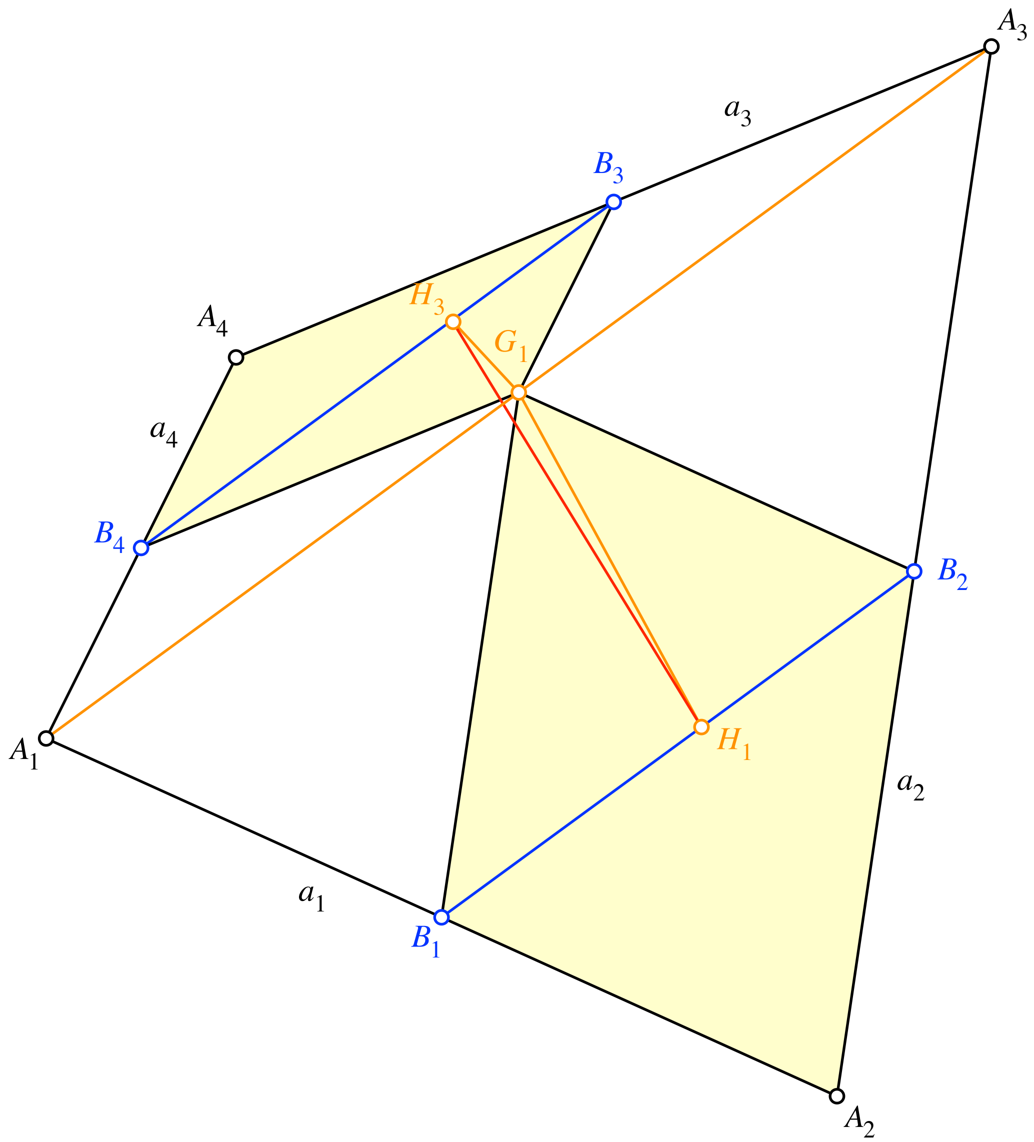

Abb. 2: Winkelhalbierende

Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle B_1 G_1 B_2$ schneidet die Strecke $\overline{B_1 B_2}$ im Punkt H_1. Die Abschnitte von diesem Schnittpunkt zu den Endpunkten der Strecke sind daher im Verhältnis der anliegenden Seiten des Dreiecks $B_1 B_2 G_1$ und damit auch im umgekehrten Verhältnis zu den Streckenlängen a_1 und a_2. Es ist also:

$$\overline{H_1 B_2} : \overline{H_1 B_1} = a_1 : a_2 \tag{1}$$

Damit ist H_1 der Schwerpunkt der beiden Viereckseiten a_1 und a_2.

Analog ist H_3 der Schwerpunkt der Viereckseiten a_3 und a_4.

$$\overline{H_3 B_4} : \overline{H_3 B_3} = a_3 : a_4 \tag{2}$$

Der Schwerpunkt aller vier Viereckseiten (also der so genannte Kantenschwerpunkt des Viereckes) liegt daher auf der Geraden $H_1 H_3$.

Analog liegt der Kantenschwerpunkt K auf der Geraden $H_2 H_4$ und ist daher der Schnittpunkt dieser beiden Geraden (Abb. 3).

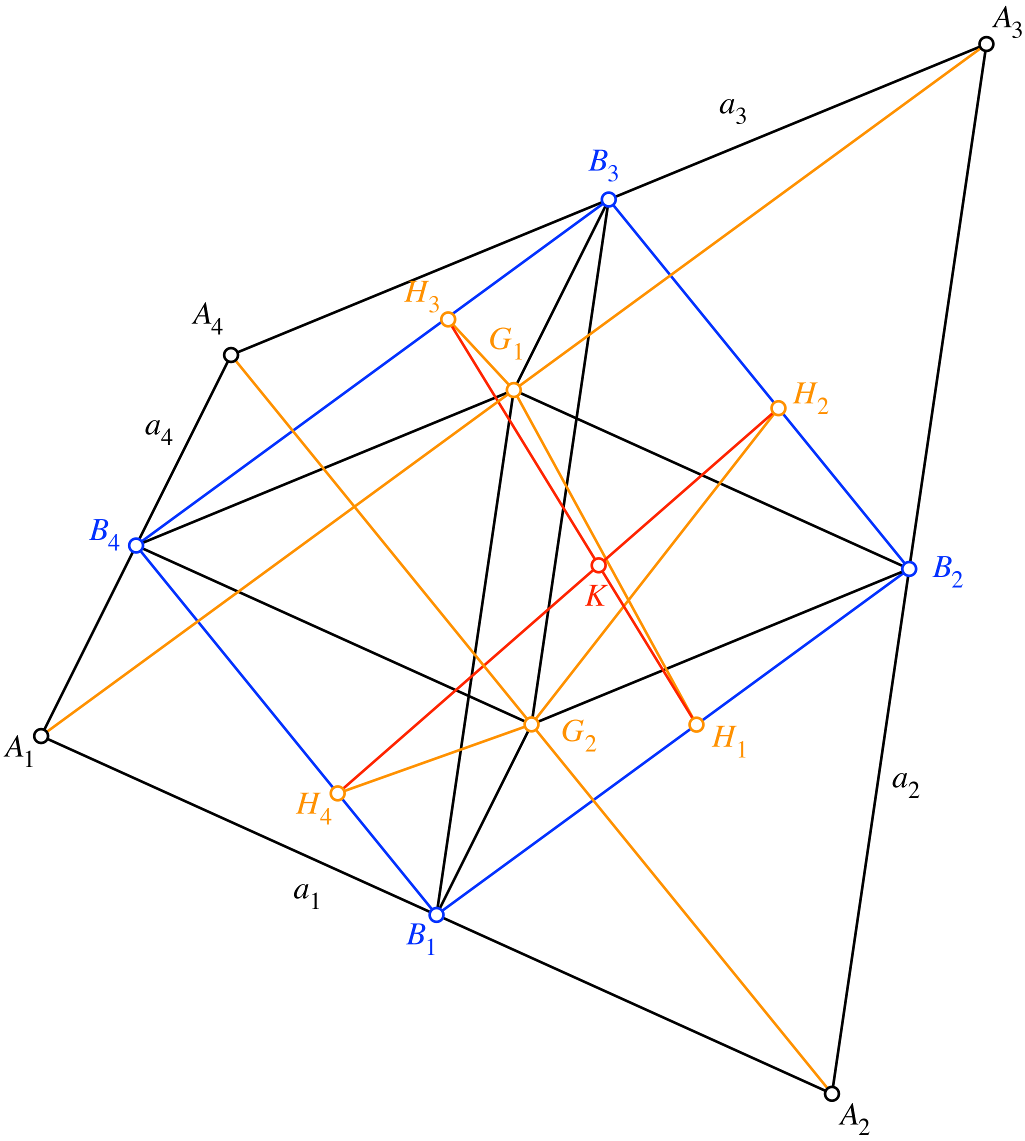

Abb. 3: Kantenschwerpunkt

4 Der Eckenschwerpunkt

Der Eckenschwerpunkt E ist der Mittelpunkt des Parallelogramms $B_1B_2B_3B_4$ und kann zum Beispiel als Schnittpunkt der Strecken C_1C_3 und C_2C_4 gefunden werden (Abb. 4). Er ist auch der Mittelpunkt dieser Strecken.

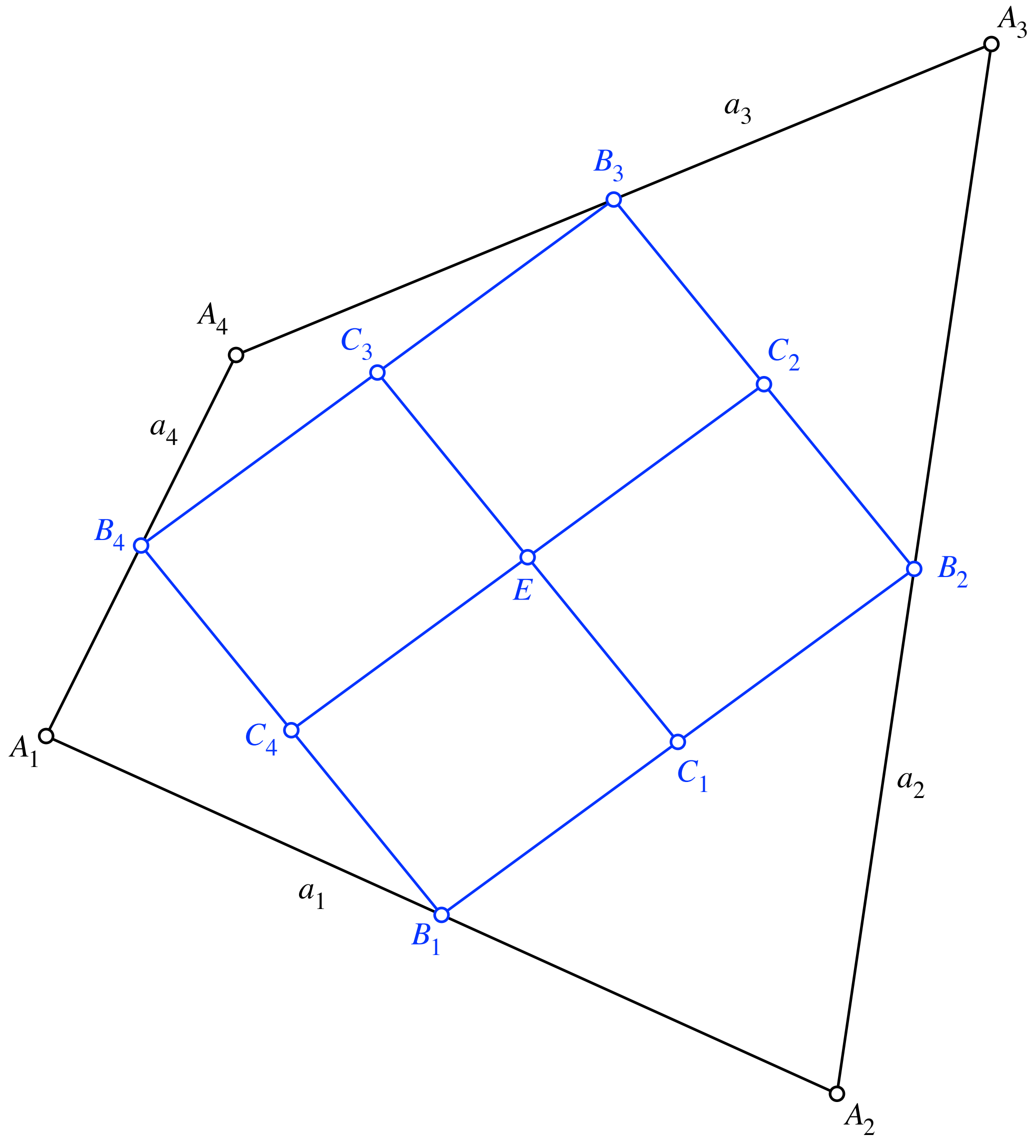

Abb. 4: Eckenschwerpunkt

5 Kantenschwerpunkt = Eckenschwerpunkt?

In der Regel sind K und E verschieden.

Im Fall $K = E$ muss die Strecke H_1H_3 durch E verlaufen. Aus Symmetriegründen muss dann

$$\begin{aligned} \overline{H_1B_1} &= \overline{H_3B_3} \\ \overline{H_1B_2} &= \overline{H_3B_4} \end{aligned} \tag{3}$$

Damit wird:

$$\overline{H_1B_1} : \overline{H_1B_2} = \overline{H_3B_3} : \overline{H_3B_4} \tag{4}$$

Wegen (1) und (2) heißt das:

$$\begin{aligned} a_2 : a_1 &= a_4 : a_3 \\ a_1a_4 &= a_2a_3 \end{aligned} \tag{5}$$

Analog:

$$a_1a_2 = a_4a_3 \tag{6}$$

Durch Dividieren erhalten wir aus (5) und (6):

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_2}{a_4} \tag{7}$$

Aus (7) für die positiven Kantenlängen:

$$a_4^2 = a_2^2 \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_2 \tag{8}$$

Analog folgt auch die Gleichheit der beiden anderen Seiten. Das Viereck ist ein Parallelogramm.

Literatur

Fritsch, Rudolf und Pickert, Günter (2014): Schwerpunkte von Vierecken. Die Wurzel, Heft 2 / 2014, 35-41.