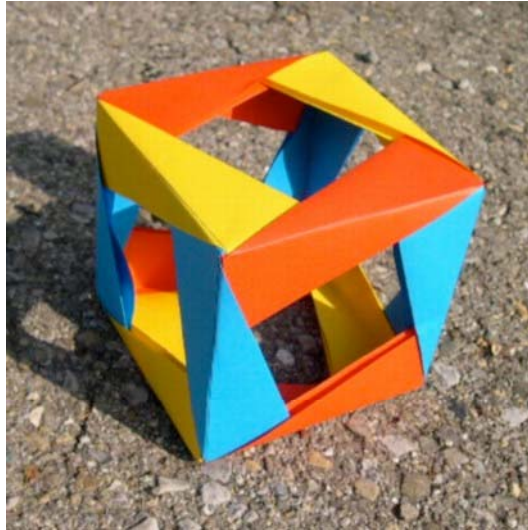


Hans Walser

Kantenmodelle

Kantenmodelle der platonischen Körper.

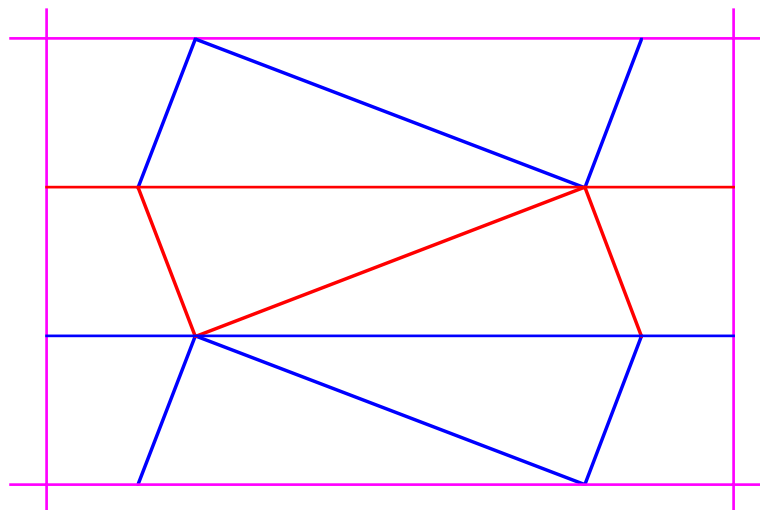


Würfelmodell

1 Würfelmodell

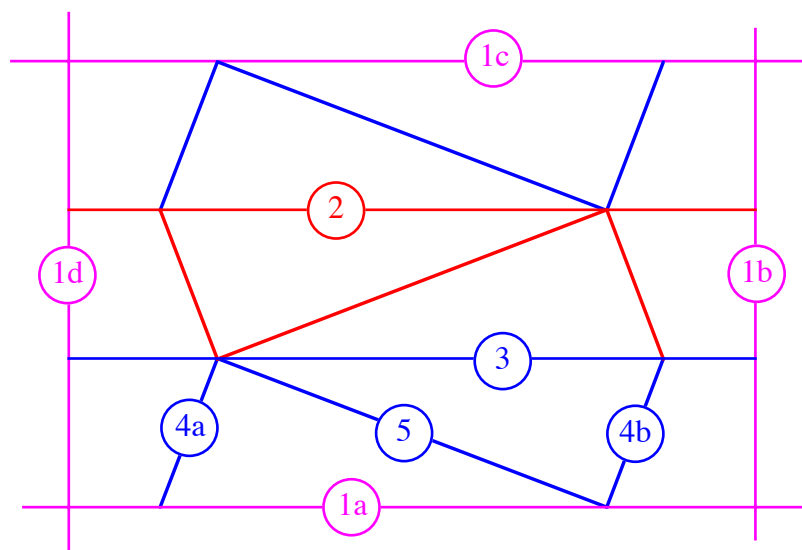
1.1 Bauteil

Wir bauen ein Kantenmodell mit einem Bauteil pro Kante, insgesamt also 12 Bauteilen. In der folgenden Figur ein Bauteil, violett sind Schnittlinien, blau Bergfalt-Linien und rot Talfalt-Linien



Bauteil

1.2 Arbeitsreihenfolge

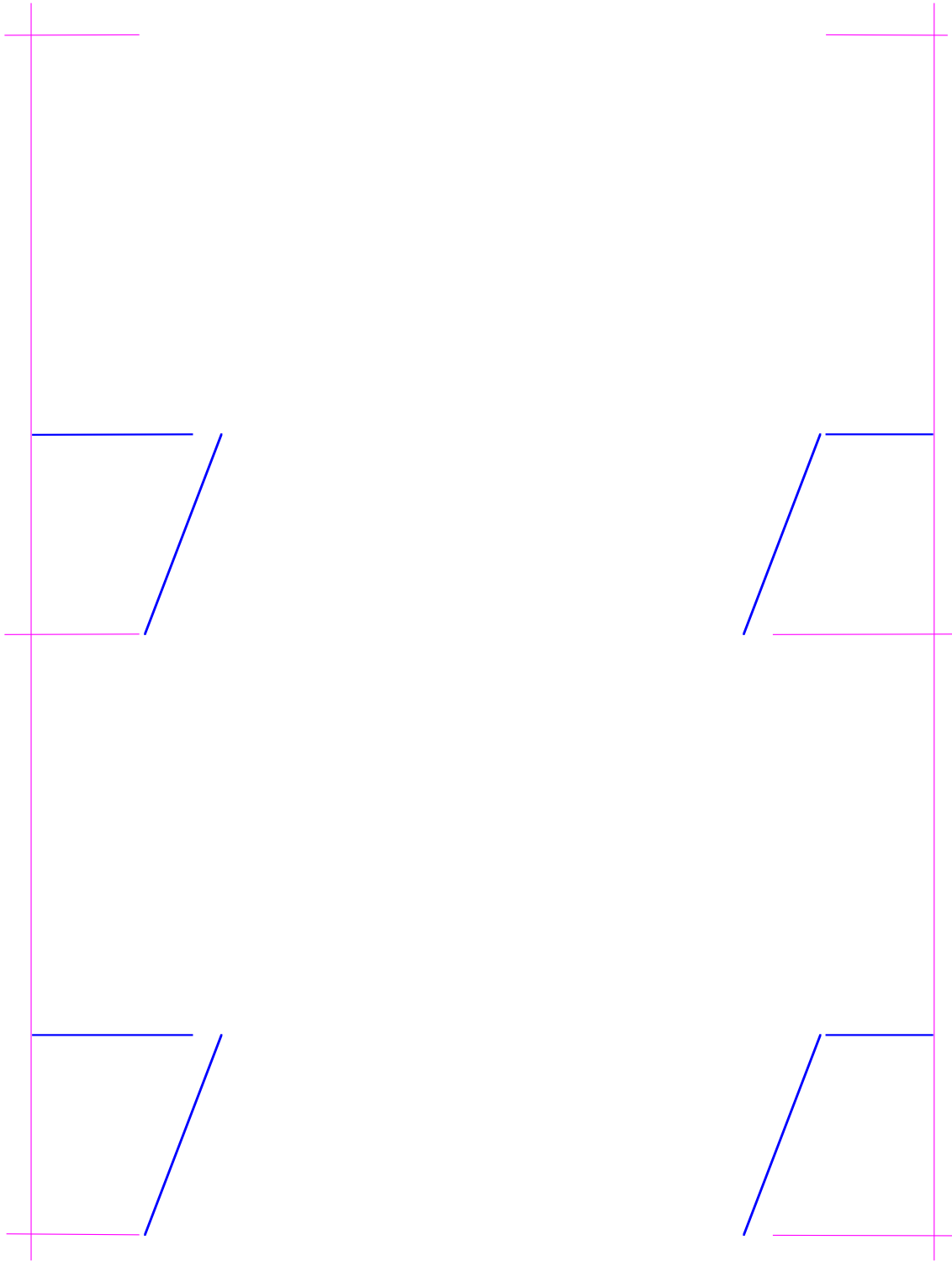


Arbeitsreihenfolge

- (1) Ausschneiden des violetten Rechteckes, jedes Bauteil einzeln. Geschnitten wird mit Lineal und Messer.
- (2) Talfalt-Linie.
- (3) Bergfalt-Linie.
- (4) Bergfalt-Linien.
- (5) Bergfalt-Linie. Die nicht nummerierten Faltnlinien ergeben sich automatisch.
- (6) Zusammensetzen des Modells. Je drei Kanten stoßen an einer Ecke zusammen und werden dort wechselseitig ineinander gesteckt.

1.3 Schnittmuster

Für die praktische Durchführung das folgende Schnittmuster. Im Schnittmuster sind nur die zwingend benötigten Falz- und Schnittlinienandeutungen eingezeichnet; diese Einzeichnungen sind im fertigen Modell dann unsichtbar. Der Schnittmusterbogen reicht für zwei Bauteile. Der Bogen wird also sechs Mal kopiert oder ausgedruckt und dann weiter verarbeitet.



Schnittmuster

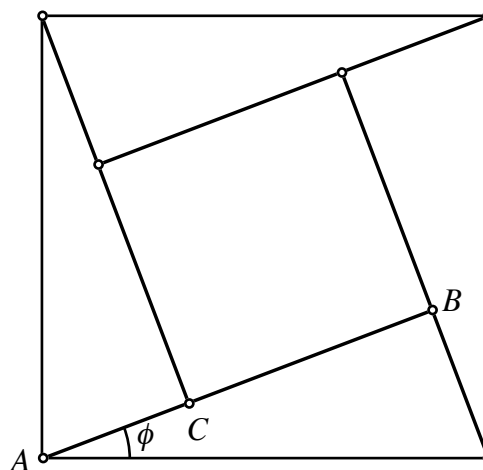
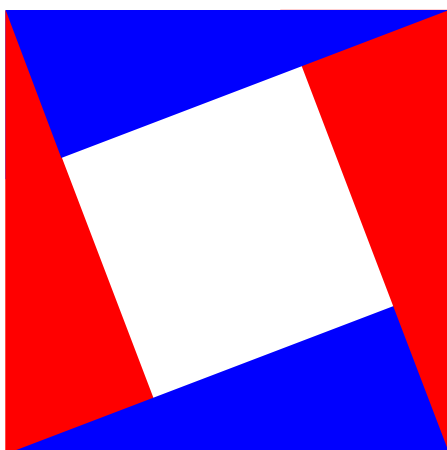
1.4 Beispiel



Würfelmodell

1.5 Der Anstellwinkel

Jede Seitenfläche des Würfels besteht aus drei deckungsgleichen Dreiecken und einem schräg gestellten quadratischen Loch.



Seitenfläche

Die Schrägstellung des Quadrates ist durch den Anstellwinkel ϕ gegeben, dies ist ein freier Parameter der zwischen 0° und 45° variieren kann.

Ich habe den Anstellwinkel ϕ so gewählt, dass das schräg gestellte Quadrat denselben Flächeninhalt hat wie jedes der vier Dreiecke. Bei dieser Wahl erscheint der goldene Schnitt; der Punkt C teilt die Strecke AB im Verhältnis des goldenen Schnittes. Mit

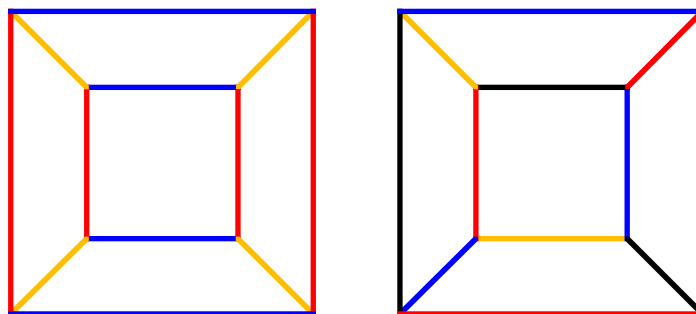
$$\rho = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$$

ist:

$$\phi = \arctan(\rho^2) \approx 20.905^\circ$$

1.6 Farbverteilung

Bei Verwendung von verschiedenen Farben gibt es mehrere symmetrische Lösungen. Im folgenden zwei Beispiele, dargestellt an Schlegeldiagrammen.

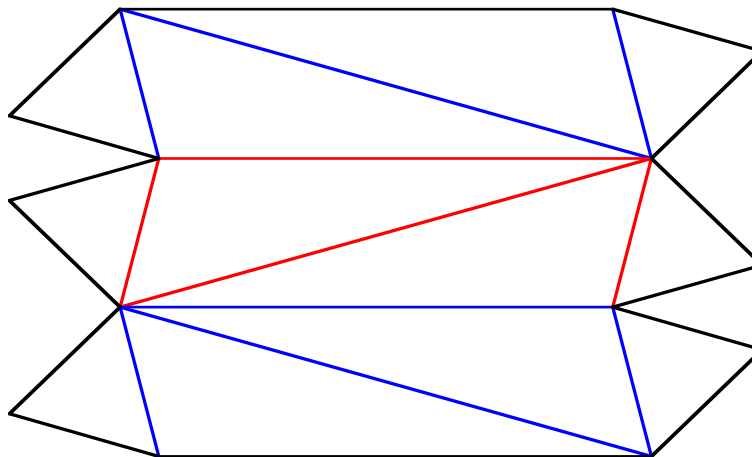


Symmetrische Farbverteilungen mit drei Farben und mit vier Farben

2 Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder

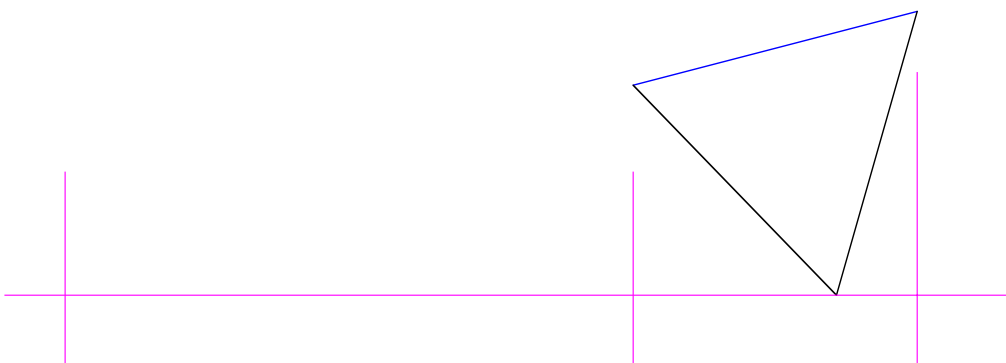
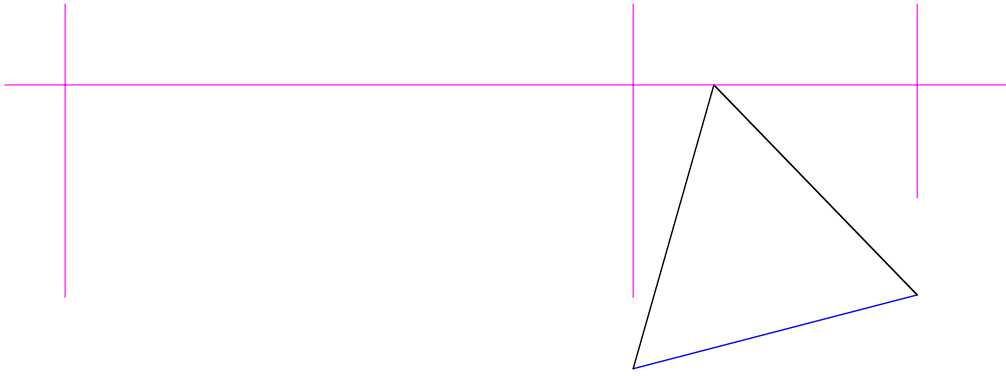
2.1 Bauteil

Diese drei Modelle können mit demselben Bauteil hergestellt werden.

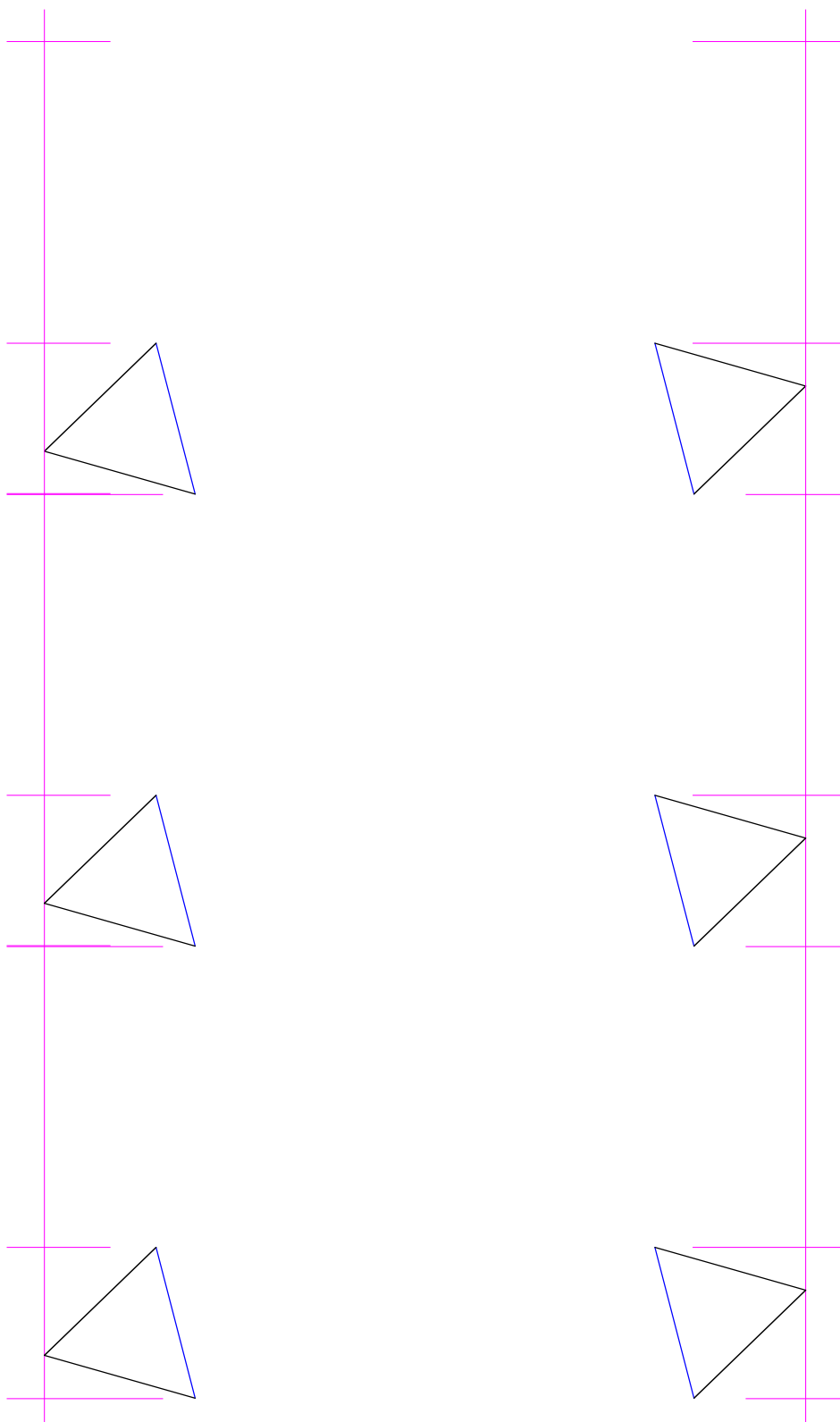


Bauteil

Das Tetraeder hat sechs Kanten und benötigt daher sechs Bauteile, das Oktaeder 12 Bauteile und das Ikosaeder 30 Bauteile.



Schnittmuster mit einem Bauteil



Schnittmuster mit drei Bauteilen

2.4 Tetraeder

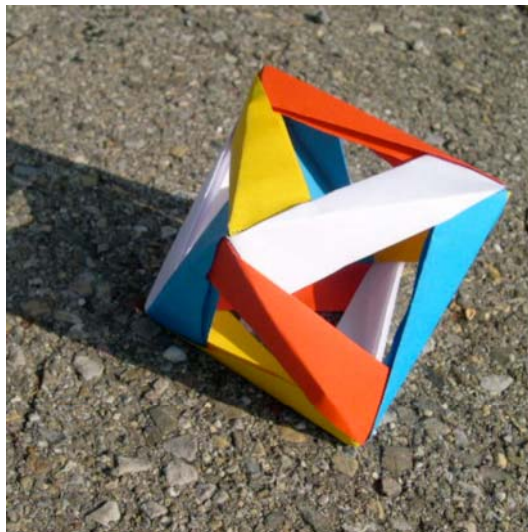
Das Tetraedermodell hält ohne Klebemittel problemlos.



Tetraedermodell

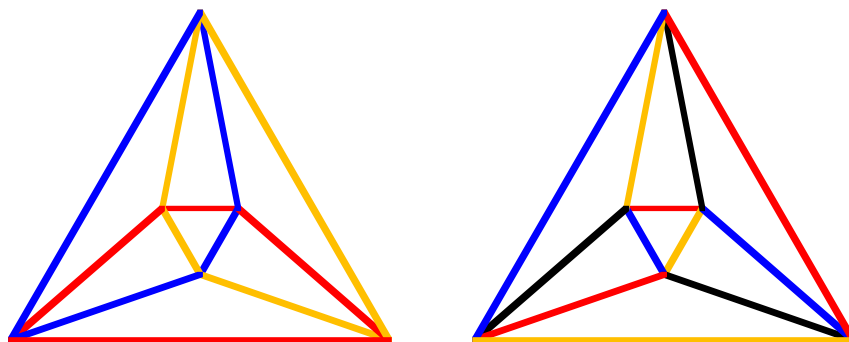
2.5 Oktaeder

Bei diesem Oktaedermodell musste ich mit Klebestift etwas nachhelfen.



Oktaedermodell

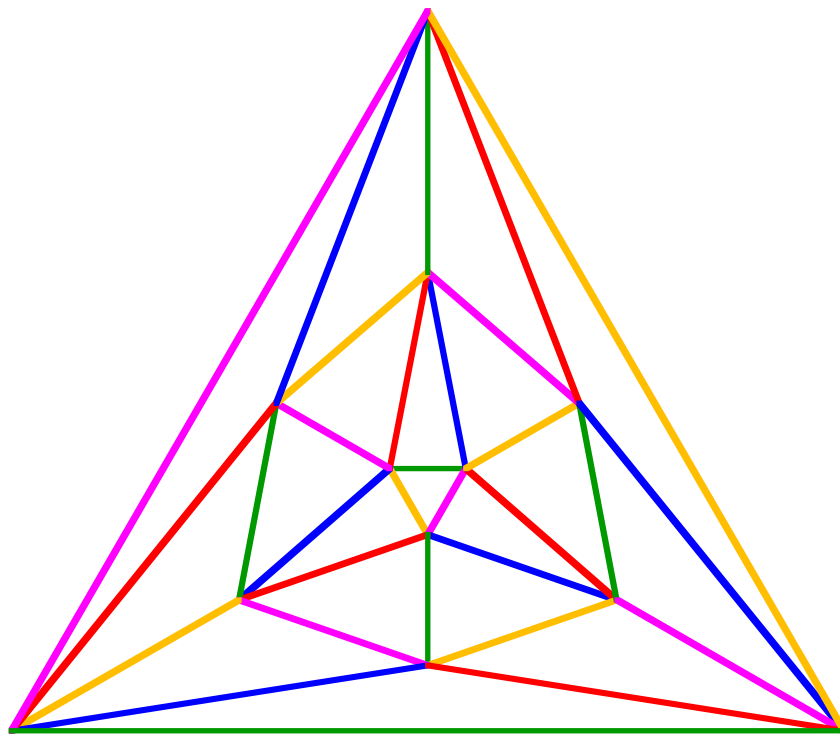
Entsprechend zum Würfel gibt es auch beim Oktaeder verschiedene Färbungsmöglichkeiten.



Symmetrische Farbverteilungen mit drei Farben und mit vier Farben

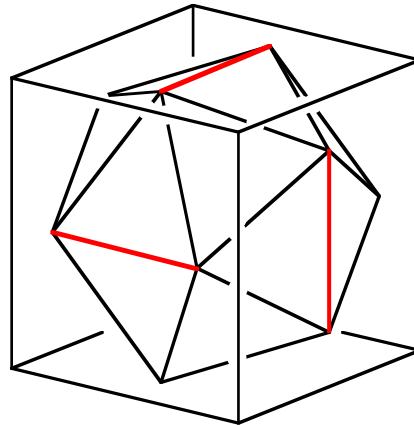
2.6 Ikosaeder

Beim Ikosaeder ist es sinnvoll, sich schon vor dem Zusammenbau Gedanken über die Farbverteilung zu machen. Eine Möglichkeit besteht in fünf Farben, welche je auf sechs Kanten erscheinen.



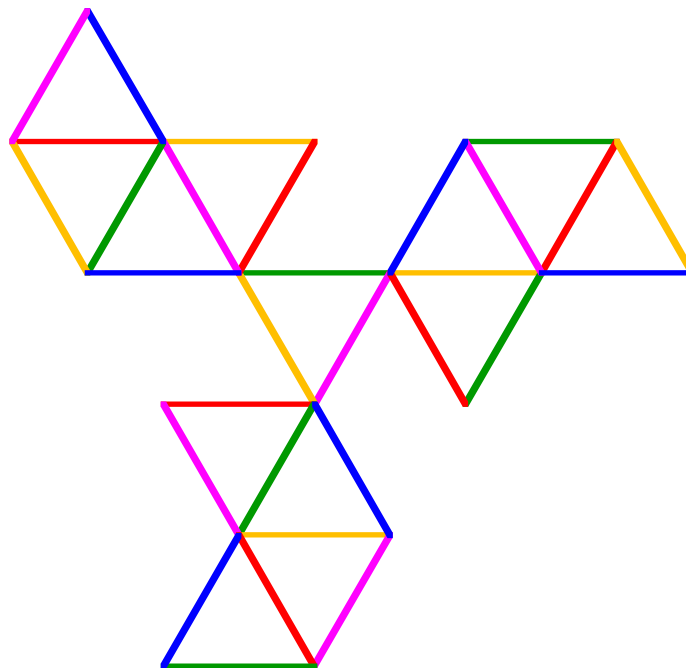
Symmetrische Farbverteilung mit fünf Farben

Bei dieser Färbung kommen an jeder Ecke alle fünf Farben zusammen. Das Ikosaeder kann so in den Würfel eingelegt werden, dass sechs Kanten gleicher Farbe eingemittelt auf die sechs Seitenflächen des Würfels zu liegen kommen.



Kanten gleicher Farbe

Beim Zusammenbau stellen wir zuerst eine ebene Kantenabwicklung her. Die folgende Figur zeigt diese Kantenabwicklung von der Innenseite des Modells.



Kantenabwicklung in der Theorie

Diese Kantenabwicklung erstaunt, weil sie an drei Stellen nur über Ecken zusammenhängt. Das ist aber kein Problem bei unseren Eckenverbindungen.



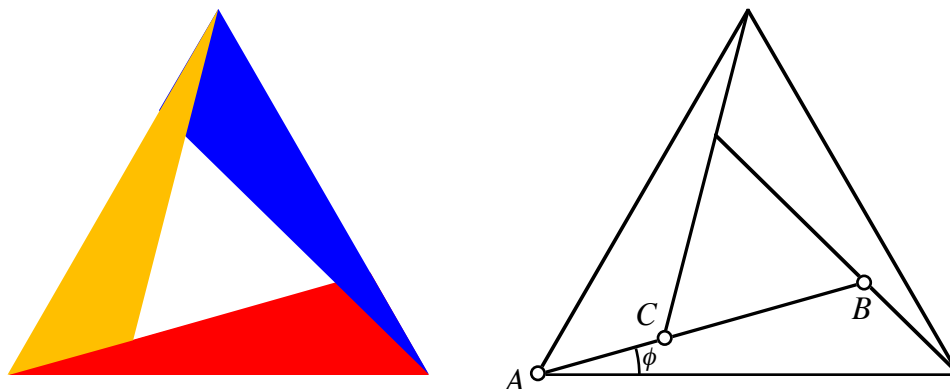
Kantenabwicklung in der Praxis



Ikosaedermodell

2.7 Der Anstellwinkel

Jede Seitenfläche der Modelle für Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder besteht aus drei kongruenten Dreiecken und einem schräg gestellten Loch in der Form eines gleichseitigen Dreiecks. Der Anstellwinkel ϕ ist wiederum ein freier Parameter. Er kann zwischen 0° und 30° variieren.



Seitendreieck

Ich habe den Anstellwinkel ϕ so gewählt, dass das schräg gestellte gleichseitige Dreieck denselben Flächeninhalt hat wie jedes der drei anderen Dreiecke. Bei dieser Wahl erscheint der goldene Schnitt; der Punkt C teilt die Strecke AB im Verhältnis des goldenen Schnittes. Mit

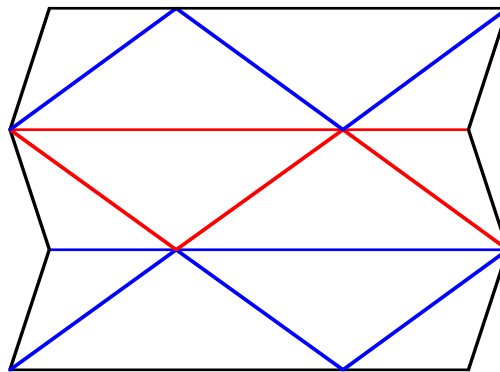
$$\rho = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$$

ist:

$$\phi = \arctan\left(\frac{\rho\sqrt{3}}{2+3\rho}\right) \approx 15.522^\circ$$

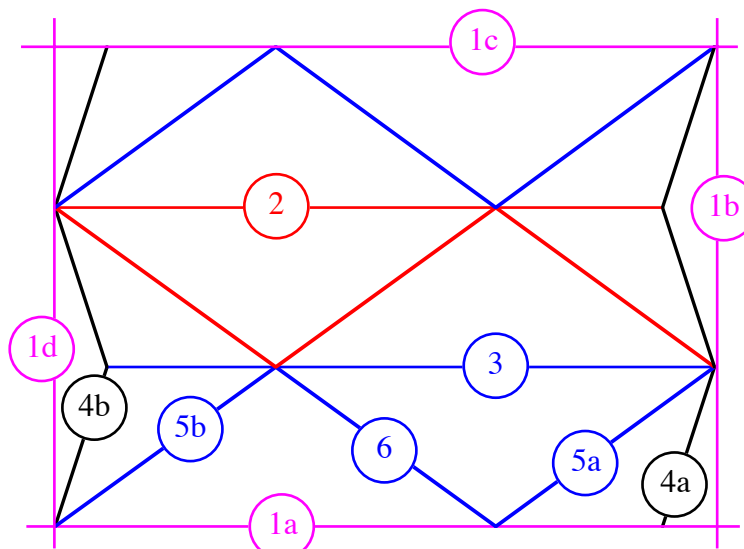
3 Das Dodekaeder

3.1 Bauteil



Bauteil

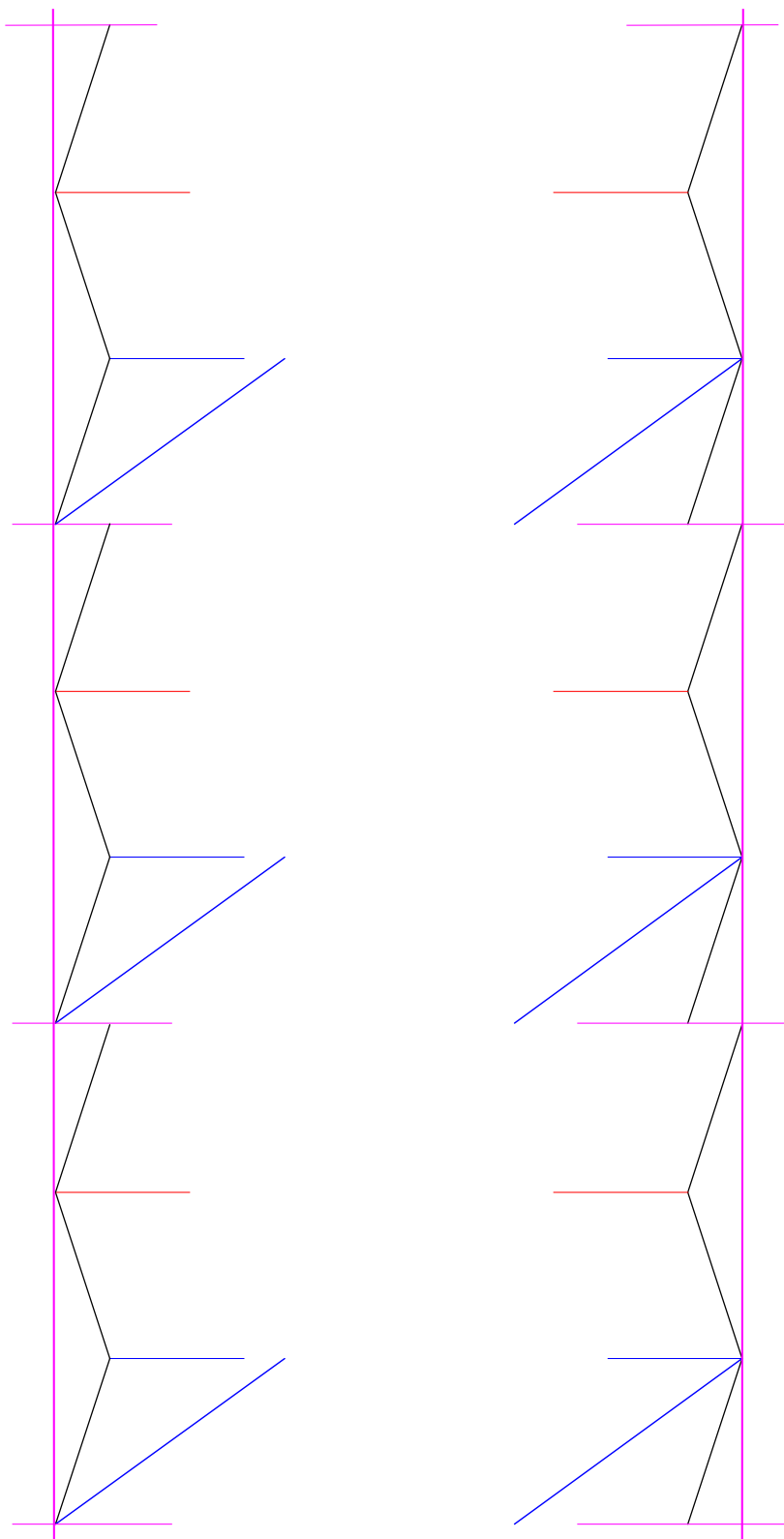
3.2 Arbeitsreihenfolge



Arbeitsreihenfolge

- (1) Ausschneiden des violetten Rechteckes mit Messer und Lineal.
- (2) Talfalt-Linie.
- (3) Bergfalt-Linie.
- (4) Ausschneiden der Laschen längs der schwarzen Linie mit der Schere. Die nicht nummerierten Laschen werden automatisch mitgeschnitten.
- (5) Bergfalt-Linien.
- (6) Bergfalt-Linie. Die nicht nummerierten Faltlinien entstehen automatisch.

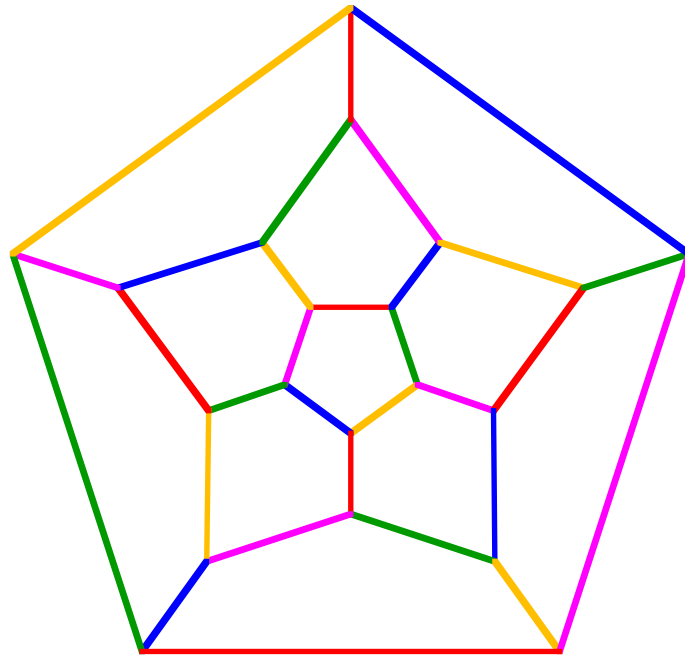
3.3 Schnittmuster



Schnittmuster

3.4 Färbung

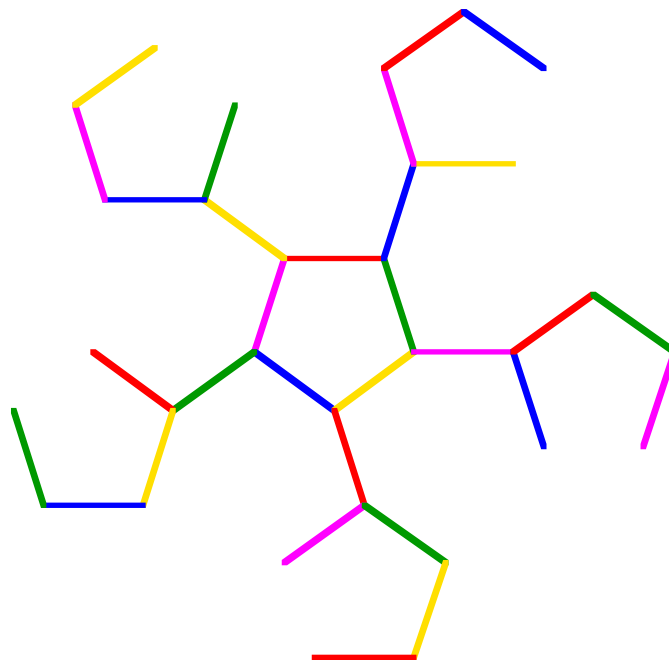
Analog zum Ikosaeder können die Kanten des Dodekaeders mit fünf Farben regelmäßig gefärbt werden.



Symmetrische Färbung mit fünf Farben

3.5 Zusammenbau

Beim Zusammenbau stellen wir wiederum zuerst eine ebene Abwicklung her. Bei diesem Arbeitsschritt habe ich die Laschen mit Klebestift fixiert.



Kantenabwicklung in der Theorie



Kantenabwicklung in der Praxis

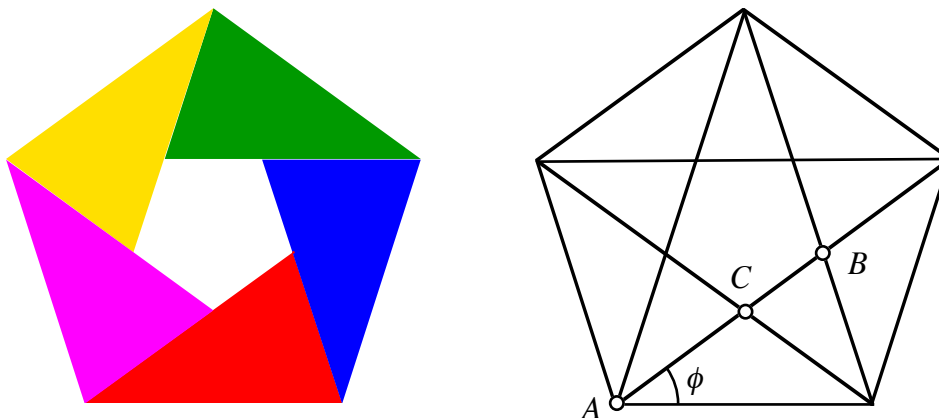
Das restliche Zusammenstecken zum räumlichen Modell geht nun ohne Klebstoff.



Dodekaedermodell

3.6 Der Anstellwinkel

Der Anstellwinkel ϕ ist wiederum ein freier Parameter. Zunächst denkt man, der Anstellwinkel könne zwischen 0° und 54° variieren. Ein Anstellwinkel größer als 36° hat aber zur Folge, dass das Bauteil nicht nur die nächste, sondern auch die übernächste Kante tangiert.



Seitenfläche und Anstellwinkel

Ich habe den Anstellwinkel 36° gewählt; das Lochfünfeck sitzt dann auf den Diagonalen des Seitenfünfeckes. Es erscheint zwar wieder der goldene Schnitt, indem der Punkt C die Strecke AB im Verhältnis des goldenen Schnittes teilt. Das ist aber nicht umwerfend im regelmäßigen Fünfeck. Hingegen ist es nicht mehr möglich, den Anstellwinkel mit der Obergrenze 36° so zu wählen, dass das Lochfünfeck und die fünf farbigen Dreiecke flächengleich sind. Das Loch ist zu groß.

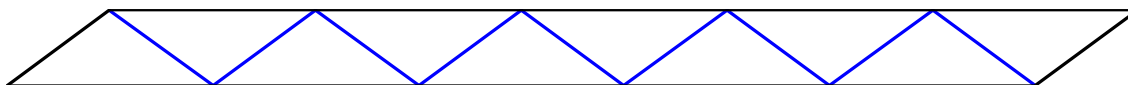
3.7 Flechtmodell

Dank des Anstellwinkels von 36° sehen wir durchgehende Streifen, auf denen aber jede Farbe genau ein Mal vorkommt. Wenn wir direkt mit Streifen arbeiten, führt das zu einem Flechtmodell (vgl. [Hilton/Pedersen 1994], [Hilton/Pedersen/Walser 2003]). Wir brauchen für das Flechtmodell des Dodekaeders sechs Streifen.



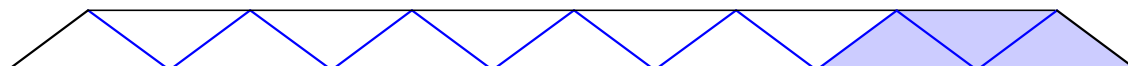
Flechtmodell des Dodekaeders

Ein einzelner Streifen besteht theoretisch aus 10 gleichschenkligen Dreiecken mit Basiswinkeln 36° .



Theoretischer Streifen

Aus praktischen Gründen fügen wir zu Verheftungszwecken noch drei zusätzliche Dreiecke dazu.



Streifen in der Praxis

Literatur

[Hilton/Pedersen 1994] Hilton, Peter / Pedersen, Jean: Build Your Own Polyhedra. Menlo Park: Addison-Wesley 1994. ISBN 0-201-49096-X

[Hilton/Pedersen/Walser 2003] Hilton, Peter / Jean Pedersen / Hans Walser: Die Kunst der Mathematik. Von der handgreiflichen Geometrie zur Zahlentheorie. Dillingen: Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung. 2003