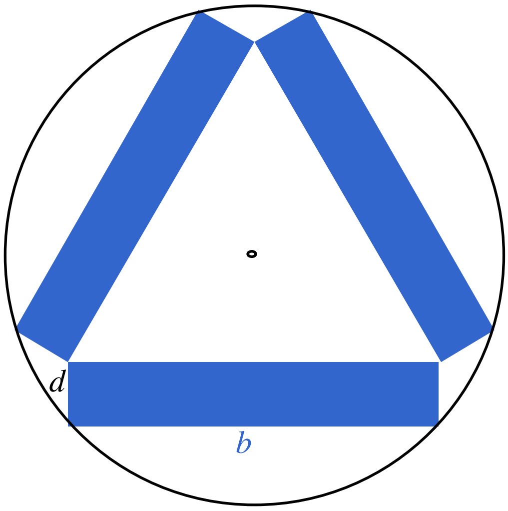
Hans Walser, [20080922a]

Kaleidoskop

Anregung: J. S.

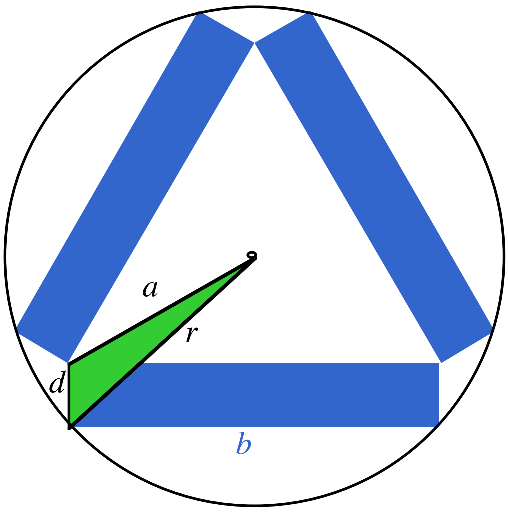
In einen Zylinder mit gegebenem Innenradius r sollen $n \geq 3$ Spiegel der Dicke d zu einem Kaleidoskop eingepasst werden (Figur für das klassische Kaleidoskop mit $n = 3$). Gesucht ist die Spiegelbreite b.



Kaleidoskop

Bearbeitung

Wir arbeiten mit dem in der folgenden Figur eingezeichneten Dreieck. Dieses hat den stumpfen Winkel $\pi - \frac{\pi}{n}$.



Arbeitsfigur

Zunächst ist $b = 2a\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Der Kosinussatz im Dreieck liefert:

$$r^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) = a^2 + d^2 + 2ad\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Daraus ergibt sich die quadratische Gleichung für a:

$$a^2 + 2ad\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + d^2 - r^2 = 0$$

Diese hat die positive Lösung:

$$a = -d\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sqrt{r^2 - d^2\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Wegen $b = 2a\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ erhalten wir für die gesuchte Spiegelbreite:

$$b = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(-d\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sqrt{r^2 - d^2\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)$$

Für das klassische Kaleidoskop mit 3 Spiegeln erhalten wir daraus:

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-d + \sqrt{4r^2 - 3d^2}\right)$$

Bemerkung: Bei dieser Lösung treffen zwei benachbarte Spiegel entlang einer gemeinsamen Kante aufeinander. Das ist statisch sehr ungünstig und dürfte in der Praxis kaum funktionieren.