Hans Walser, [20160829]

KO-Turnier

Anregung: M. L., F.

1 Problemstellung

An einem KO-Turnier nehmen 2^n Spieler teil.

Die Paarungen für die erste Runde werden zufällig zusammengestellt.

Die Abbildung 1 zeigt ein Beispiel für 16 Spieler. Der beste Spieler ist mit 1 bezeichnet, der schlechteste mit 16.

Wie geht es in der zweiten Runde weiter?

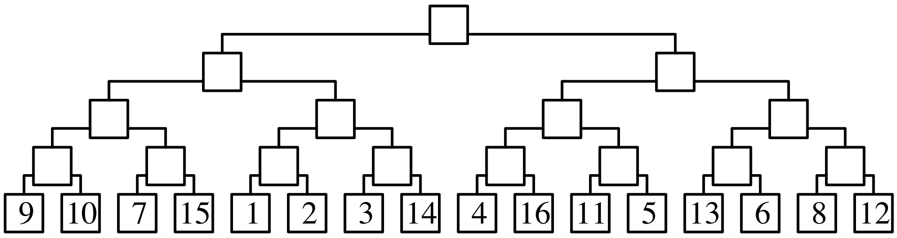

Abb. 1: Beispiel einer Ausgangslage

Fragen:

a) Wie viele Runden braucht das Turnier?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit P_b kommt der zweitbeste Spieler ins Finale?

c) Welches ist der schlechteste Spieler, der noch ins Finale kommen kann? Mit welcher Wahrscheinlichkeit P_c kommt dieser Spieler ins Finale?

2 Ergebnisse

a) Es braucht n Runden

b) $P_b = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}$

c) Der Spieler mit dem Rang $2^{n-1} + 1$ ist der schlechteste Spieler, der noch ins Finale kommen kann. Das ist der beste Spieler in der rangmäßig zweiten Hälfte. Dieser Spieler kommt mit der Wahrscheinlichkeit $P_c = \frac{2}{\binom{2^n}{2^{n-1}}}$ ins Finale.

3 Bearbeitung

a) Beweis induktiv. Jede Verdoppelung der Spielerzahl benötigt eine zusätzliche Runde.

b) Der zweitbeste Spieler kommt ins Finale, wenn er bei der ersten Runde nicht in derselben Baumhälfte des Turnier-Organigramms ist wie der beste Spieler. Es gibt dazu 2^{n-1} günstige und $2^n - 1$ mögliche Fälle. Die Abbildung 2 zeigt einen für den zweitbesten Spieler günstigen Fall, die Abbildung 3 einen für den zweitbesten Spieler ungünstigen Fall.

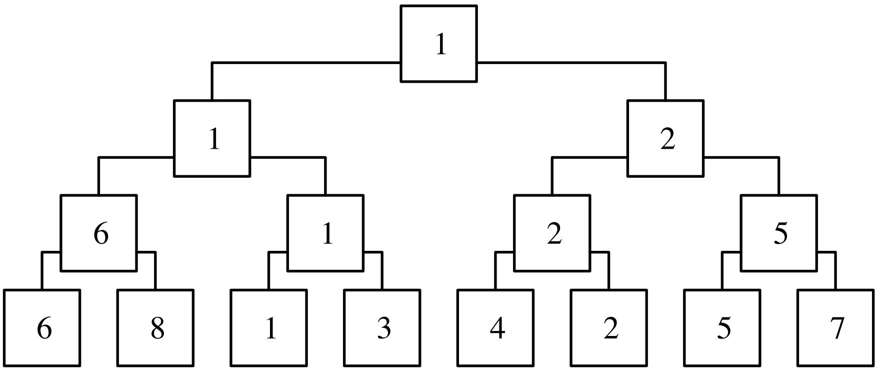

Abb. 2: Der zweitbeste Spieler kommt ins Finale

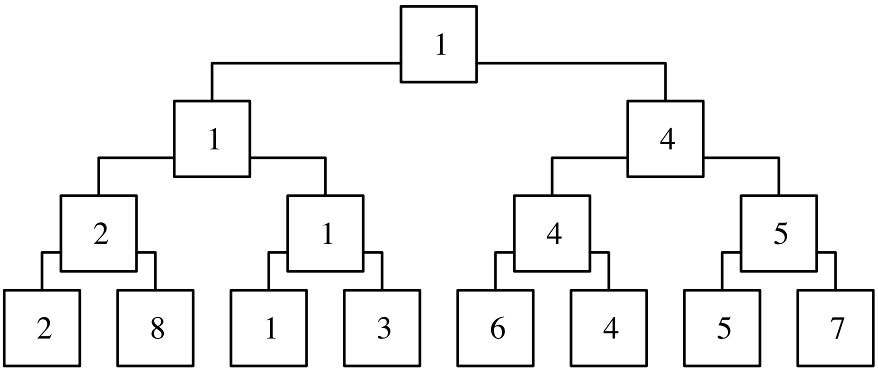

Abb. 3: Der zweitbeste Spieler kommt nicht ins Finale

c) Der beste Spieler in der rangmäßig zweiten Hälfte kommt dann ins Finale, wenn in der ersten Runde alle besseren Spieler in der anderen Hälfte des Turnier-Organigramms sind. Für einen noch schlechteren Spieler kann diese Bedingung nicht erfüllt sein. Es geht jetzt darum, die 2^n Spieler in zwei Gruppen zu je 2^{n-1} Spieler aufzuteilen. Dazu gibt es $\binom{2^n}{2^{n-1}}$ Möglichkeiten. Zwei davon sind günstig (Bester Spieler in der ersten Hälfte und Spieler im Rang $2^{n-1}+1$ in der zweiten Hälfte oder umgekehrt). Die Abbildung 4 zeigt einen für den Spieler im Rang $2^{n-1}+1$ günstigen Fall, die Abbildung 5 einen ungünstigen Fall.

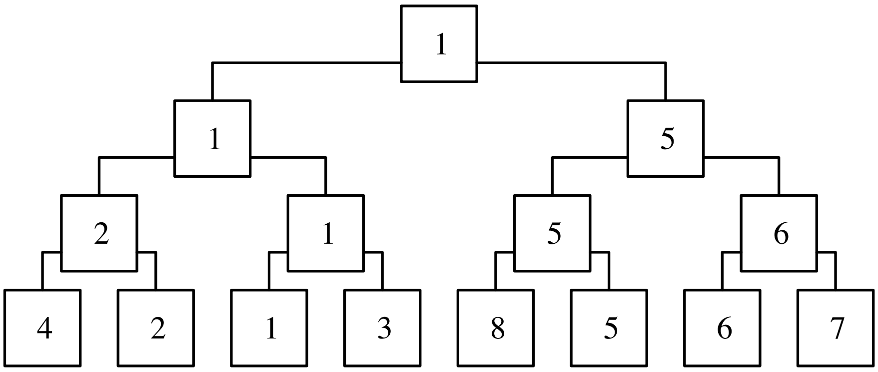

Abb. 4: Günstiger Fall für den besten Spieler in der rangmäßig zweiten Hälfte

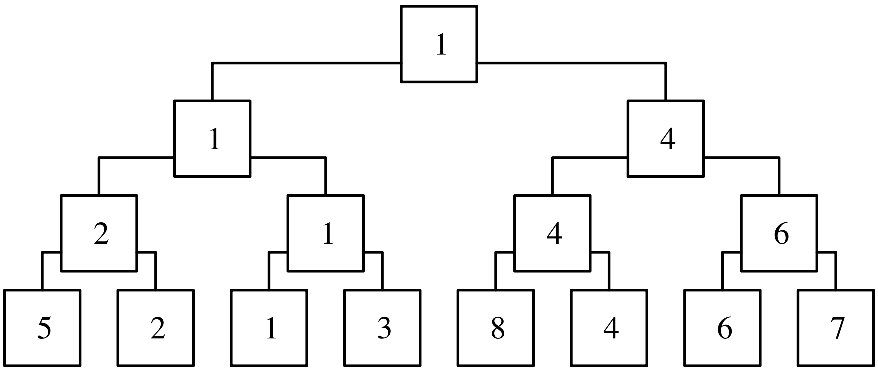

Abb. 5: Ungünstiger Fall für diesen Spieler

Die Tabelle 1 gibt die Werte für die Wahrscheinlichkeiten in b) und c) in Abhängigkeit von n.

n	Anzahl Spieler	P_b	P_c
1	2	1	1
2	4	0.6666666667	0.3333333333
3	8	0.5714285714	0.02857142857
4	16	0.5333333333	0.0001554001554
5	32	0.5161290323	$3.327341955 * 10^{-9}$
6	64	0.5079365079	$1.091331253 * 10^{-18}$
7	128	0.5039370079	$8.350331114 * 10^{-38}$
8	256	0.5019607843	$3.467010377 * 10^{-76}$
9	512	0.5009784736	$4.232326780 * 10^{-153}$
10	1024	0.5004887586	$4.463035913 * 10^{-307}$
$n \to \infty$		0.5	0

Tab. 1: Numerische Werte