Hans Walser, [20170514]

Jonas zerlegt Gauß

1 Die Anekdote

Vom kleinen Gauß geht die Anekdote, er habe in der Schule die Zahlen von 1 bis n zusammenzählen müssen. Die Anekdote existiert in drei Varianten, nämlich für die Obergrenzen $40, 60$ und 100:

$$\sum_{k=1}^{40} k = 820, \qquad \sum_{k=1}^{60} k = 1830, \qquad \sum_{k=1}^{100} k = 5050 \tag{1}$$

In der Schule wird meistens die dritte Variante kolportiert. Vielleicht haben die Schulmeister eine professionelle Affinität zum Dezimalsystem, obwohl dies im Kontext der Aufgabe keine Rolle spielt.

2 Die übliche Visualisierung

Es wird mit kreisrunden Punkten (Humanistisch angehauchte Lehrpersonen reden von *Calculi*, Kieselsteinen also, die anderen von *Zählpfennigen*) gearbeitet, die in einem Quadratraster angeordnet werden. Weil 100 dann ab er doch eine gar große Zahl ist, macht man es mit 10 (Abb. 1).

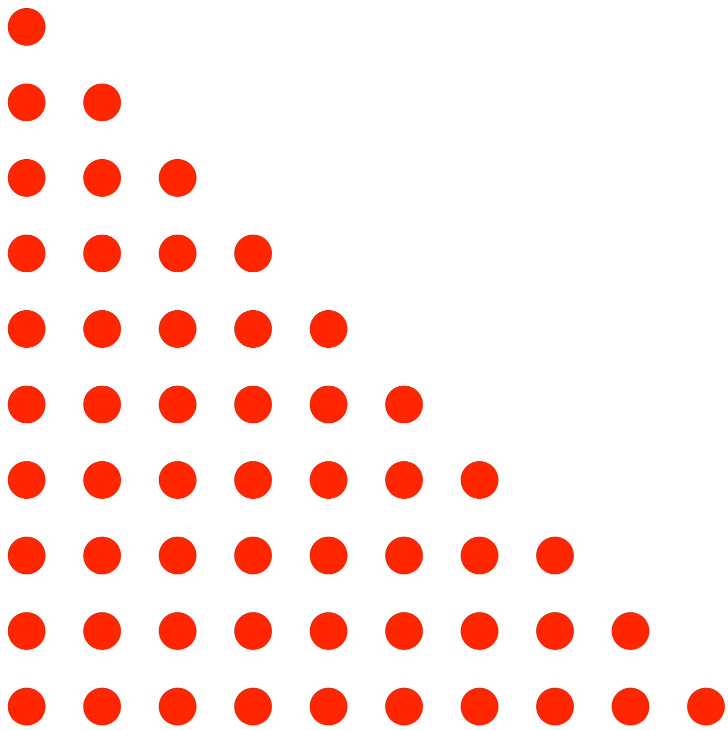

Abb. 1: Summe der Zahlen von 1 bis 10

Und dann wird mit einem der üblichen Tricks (Dreiecksfläche mit Korrekturen, Ergänzung zu Rechteck oder Quadrat) die Formel hergeleitet.

Die Summe der Zahlen von 1 bis 10 ist allerdings noch überschaubar und kann im Kopf berechnet werden. Wir brauchen die Formel nicht. Ich komme auf 55.

3 Die Idee von Jonas

Wir nehmen zehnmal die Treppe der Abbildung 1. Das ist aber nur die Feinabstimmung. Als Unterbau fahren wir ein gröberes Kaliber auf (Abb. 2).

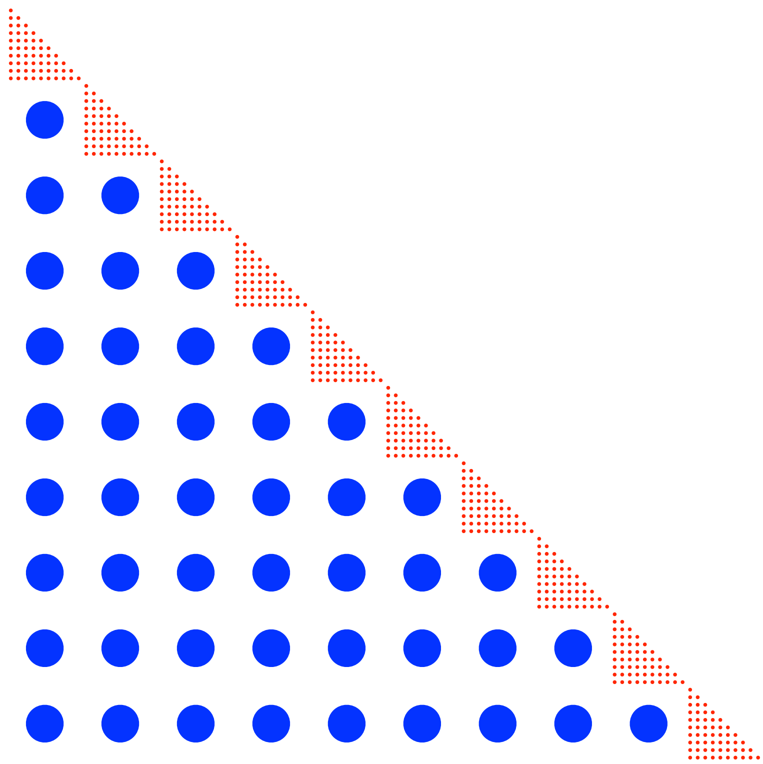

Abb. 2: Idee von Jonas

Ein blauer Punkt entspricht $10^2 = 100$ roten Punkten. Die blauen Punkte bilden ihrerseits eine Treppe, allerdings mit nur 9 Stufen. Die Summe der Zahlen von 1 bis 9 ist 45. Wir haben also 45 blaue Punkte. Das ist noch überschaubar und kann ohne Formel berechnet werden.

Nun können wir fröhlich weiterrechnen:

$$\sum_{k=1}^{100} k = 10 \cdot 55 + 100 \cdot 45 = 5050 \tag{2}$$

4 Loslösung vom Dezimalsystem

Die obige Darstellung ist offensichtlich am Dezimalsystem orientiert. Dies ist aber nicht zwingend. Als Gegenbeispiel berechnen wir die Summe der Zahlen von 1 bis 40, wobei wir 40 in die Faktoren 5 und 8 zerlegen.

Die Summe der Zahlen von 1 bis 5 ist 15 (Kopfrechnung) (Abb. 3).

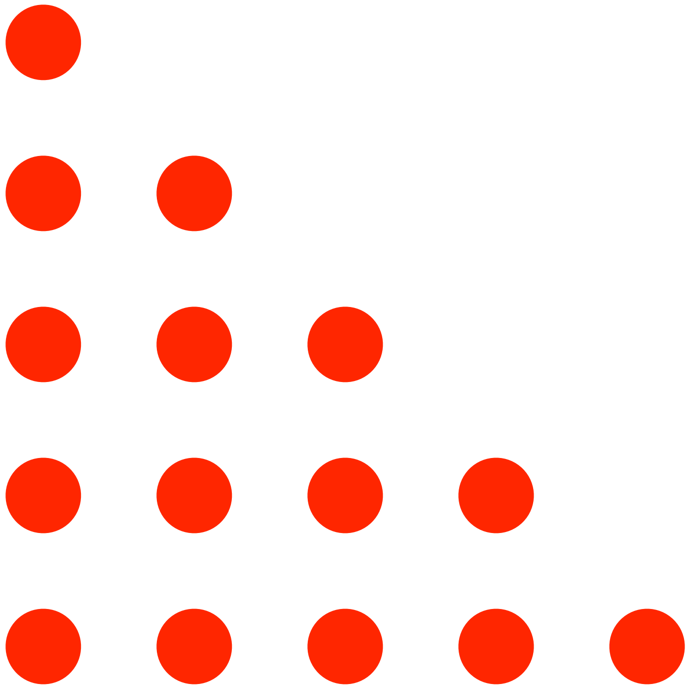

Abb. 3: Die Summe der Zahlen von 1 bis 5

Die Idee von Jonas führt auf die Darstellung der Abbildung 4. Ein blauer Punkt entspricht $5^2 = 25$ roten Punkten. Die Treppe der blauen Punkte ist $(8 - 1) = 7$ Stufen hoch. Somit ist die Anzahl der blauen Punkte die Summe der Zahlen von 1 bis 7, also 28.

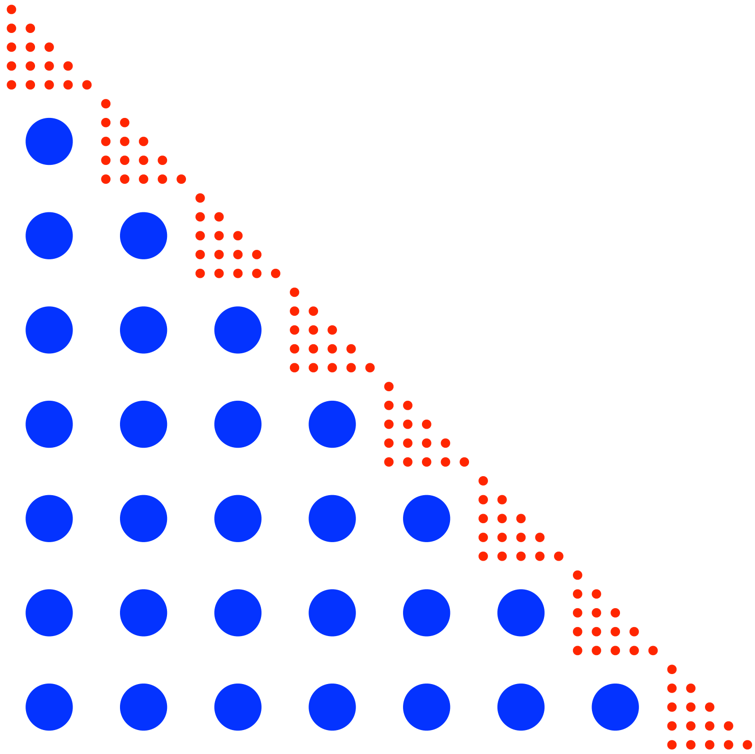

Abb. 4: Idee von Jonas

Daher erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^{40} k = 8 \cdot 15 + 25 \cdot 28 = 820 \tag{3}$$

5 Allgemein

Es soll die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n berechnet werden, wobei die Zahl n keine Primzahl ist, sondern in zwei Faktoren $n = pq$ zerlegt werden kann. Die beiden Faktoren p und q brauchen keine Primzahlen zu sein.

Natürlich müssen wir jetzt mit der Formel arbeiten.

Für feine rote Treppe, also die Summe der Zahlen von 1 bis p gilt:

$$\sum_{k=1}^{p} k = \tfrac{1}{2} p(p+1) \tag{4}$$

Ein blauer Punkt des Unterbaues entspricht p^2 roten Punkten.

Die blaue Treppe hat $(q-1)$ Stufen. Damit erhalten wir für die Anzahl der blauen Punkte:

$$\sum_{k=1}^{q-1} k = \tfrac{1}{2}(q-1)q \tag{5}$$

Für die Summe der Zahlen von 1 bis n ergibt sich nun:

$$\sum_{k=1}^{n} k = q\tfrac{1}{2}p(p+1) + p^2\tfrac{1}{2}(q-1)q = \tfrac{1}{2}\left(qp^2 + \underbrace{qp}_{n} + \underbrace{p^2q^2}_{n^2} - p^2q\right) = \tfrac{1}{2}\left(n+n^2\right) = \tfrac{1}{2}n(n+1) \tag{6}$$

Damit haben wir die übliche Formel wieder erhalten.

6 Didaktischer Kommentar

Wir sind hier mit der Kirche ums Dorf gefahren. Wir haben im Kreis herum gerechnet. Die Formel (6) wurde bei (4) und (5) bereits eingesetzt. Es geht hier aber nicht darum, diese Formel herzuleiten. Wir wollen vielmehr zeigen, dass die Idee von Jonas in sich stimmig ist.

Natürlich geht es auch für eine Zerlegung der Obergrenze n in drei Faktoren $n = pqr$. Es ist:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k &= rq\tfrac{1}{2}p(p+1) + r\tfrac{1}{2}q(q-1)p^2 + \tfrac{1}{2}r(r-1)(pq)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\cancel{rqp^2} + rqp + \cancel{rq^2p^2} - \cancel{rqp^2} + r^2p^2q^2 - \cancel{rp^2q^2}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(rqp + r^2p^2q^2\right) = \tfrac{1}{2}\left(n+n^2\right) = \tfrac{1}{2}n(n+1)\end{aligned} \tag{7}$$

7 Herleitung der Formel

Tatsächlich kann aber sehr wohl die Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen aus der Idee von Jonas hergeleitet werden. Das geht wie folgt.

Wir gehen davon aus, dass wir die Formel nicht kennen und führen eine vorerst unbekannte Funktion f ein:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} k \tag{8}$$

Wir verwenden lediglich:

$$f(1)=1 \tag{9}$$

Aus der Idee von Jonas ergibt sich für die unbekannte Funktion *f* die Funktionalgleichung:

$$f(pq)=q\,f(p)+p^2 f(q-1) \tag{10}$$

7.1 Rekursives Vorgehen

Aus (10) erhalten wir zunächst:

$$f(n)=f(1\cdot n)=n\,f(1)+1^2 f(n-1) \tag{11}$$

Wegen (9) ergibt sich die Rekursionsformel:

$$f(n)=n+f(n-1) \tag{12}$$

Zusammen mit dem Startwert (9) kann nun $f(n)$ rekursiv berechnet werden. Wir haben das Zählen neu erfunden.

7.2 Potenzreihen-Ansatz

Für *f* machen wir einen formalen Potenzreihen-Ansatz:

$$f(n)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j n^j \tag{13}$$

Aus (10) ergibt sich damit:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j q^j = q\sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j + p^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j (q-1)^j \tag{14}$$

Wir schreiben die beiden Seiten detailliert.

$$\text{Linke Seite } = a_0 + a_1 pq + a_2 p^2 q^2 + a_3 p^3 q^3 + \cdots \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\text{Rechte Seite } &= a_0 q + a_1 pq + a_2 p^2 q + a_3 p^3 q + \cdots \\ &+ a_0 p^2 + a_1 p^2 q - a_1 p^2 + a_2 p^2 q^2 - 2a_2 p^2 q + a_2 p^2 \\ &+ a_3 p^2 q^3 - 3a_3 p^2 q^2 + 3a_3 p^2 q - a_3 p^2 + \cdots\end{aligned} \tag{15}$$

Und nun ein gezielter Koeffizientenvergleich.
Das Absolutglied kommt nur links vor:

$$a_0 = 0 \tag{16}$$

Der Koeffizient von p^2 kommt nur rechts vor:

$$0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots \tag{17}$$

Der Koeffizient von $p^j q,\, j > 2$, kommt nur rechts vor:

$$0 = a_j, \quad j > 2 \tag{18}$$

Wegen (16) und (18) verschwinden alle a_j außer a_1 und a_2. Wegen (17) ist dann:

$$a_1 = a_2 \tag{19}$$

Es bleibt der Restansatz:

$$f(n) = a_1\left(n + n^2\right) \tag{20}$$

Aus (9) ergibt sich schließlich $a_1 = \frac{1}{2}$. Somit erhalten wir:

$$f(n) = \tfrac{1}{2}\left(n + n^2\right) \tag{21}$$

Das war’s.