Hans Walser, [20221214]

Iterationen

1 Worum geht es?

Gesucht sind Figuren, welche sich in zwölf kongruente und zur Startfigur ähnliche Teilfiguren zerlegen lassen.

2 Beispiele

2.1 Treppe

Die Treppe (Abb. 1a) lässt sich in zwölf dazu ähnliche und untereinander kongruente Teilfiguren zerlegen. Der Verkleinerungsfaktor ist 1/sqrt(12) ≈ 0.289. Die Teilfiguren sind gegenüber der Startfigur um ±90° gedreht.

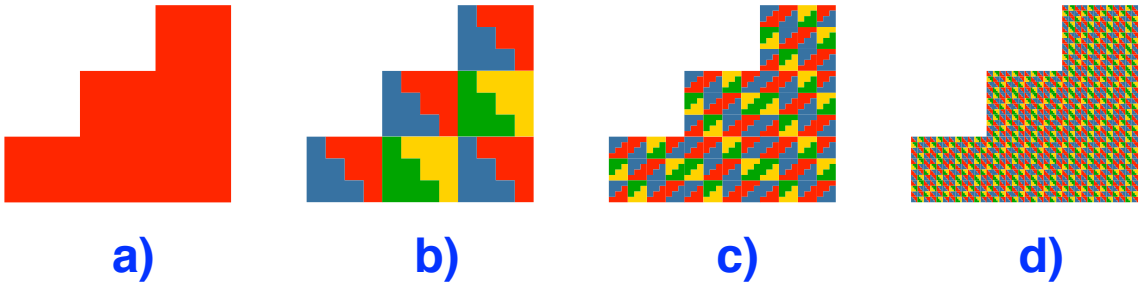

Abb. 1: Treppe

Wir können den Unterteilungsprozess iterieren. In der Abbildung 1c haben ergeben sich nun $12^2 = 144$ Teilfiguren, in der Abbildung 1d bereits $12^3 = 1728$ Teilfiguren.

2.2 F

Die Abbildung 2 zeigt ein weiteres Beispiel.

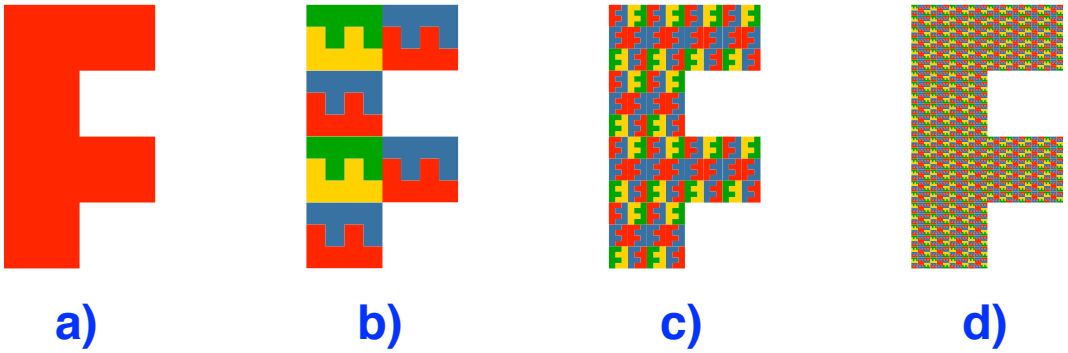

Abb. 2: F

3 Hintergrund

Wir versuchen, ein Rechteck in $3 \times 4 = 12$ dazu ähnliche und untereinander kongruente Teilrechtecke zu zerlegen (Abb. 3a). Der Versuch, sowohl das Startrechteck wie auch die Teilrechtecke im Hochformat zu zeichnen, scheitert (warum?). Wir wählen das Startrechteck im Hochformat und die Teildreiecke im Querformat. Ein Teilrechteck habe die horizontale Länge a und die vertikale Höhe b.

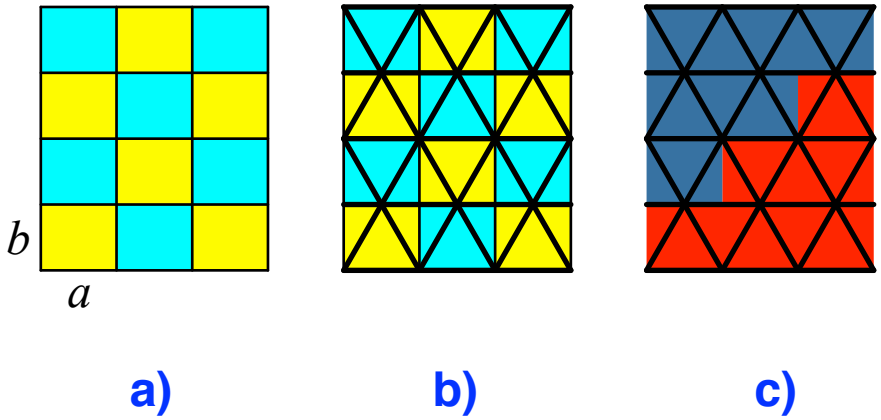

Abb. 3: Unterteilung des Rechteckes

Aus der Ähnlichkeitsbedingung folgt:

$$\frac{a}{b} = \frac{4b}{3a}$$

Daraus ergibt sich:

$$3a^2 = 4b^2$$
$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

Die vertikale Höhe b verhält sich zur horizontalen Länge a wie die Höhe zur Grundlinie im gleichseitigen Dreieck. Wir können die Figur in einen Raster aus gleichseitigen Dreiecken einpassen (Abb. 3b).

Nun teilen wir die zwölf Teilrechtecke in zwei punktsymmetrische Figuren auf. Die Abbildung 3c zeigt ein Beispiel. Eine solche nun nur noch aus sechs Rechtecken zusammengesetzte Figur ist eine Lösung für unser eingangs formuliertes Problem.

Weblinks

Hans Walser: Goldener Schnitt
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/G/Goldener_Schnitt_7/Goldener_Schnitt_7.html

Hans Walser: Iterationen
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/I/Iterationen/Iterationen.html

Hans Walser: Iterationen
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/I/Iterationen2/Iterationen2.html

Hans Walser: Iterationen
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/I/Iterationen3/Iterationen3.html

Hans Walser: Iterationen
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/I/Iterationen4/Iterationen4.html

Hans Walser: Iterationen
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/I/Iterationen5/Iterationen5.html