Hans Walser, [20150809]

Isoperimetrische Vielecke mit gegebenen Seitenlängen

Anregung: Chr. K., B.

1 Worum geht es

Unter allen n-Ecken mit gegebenen Seitenlängen $a_k, k = 1, \ldots, n$, hat dasjenige den größten Flächeninhalt, dessen Ecken $A_k, k = 1, \ldots, n$ auf einem Kreis liegen (Sehnen-n-Eck).

Es sind also, im Unterschied zu den üblichen isoperimetrischen Problemstellungen, nicht nur der globale Umfang, sondern auch die einzelnen Seitenlängen gegeben.

Der Beweis geht in zwei Schritten. Zunächst wird der Sachverhalt für das Viereck bewiesen, und anschließend verallgemeinert.

2 Viereck

Zu zeigen ist: Unter allen Vierecken mit gegebenen Seiten a_1, a_2, a_3, a_4 hat das Sehnenviereck den größten Flächeninhalt.

Für den Beweis zerlegen wir das Viereck (Abb. 1) mit der Diagonalen $e_1 = A_1A_3$ in zwei Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $A_3A_4A_1$.

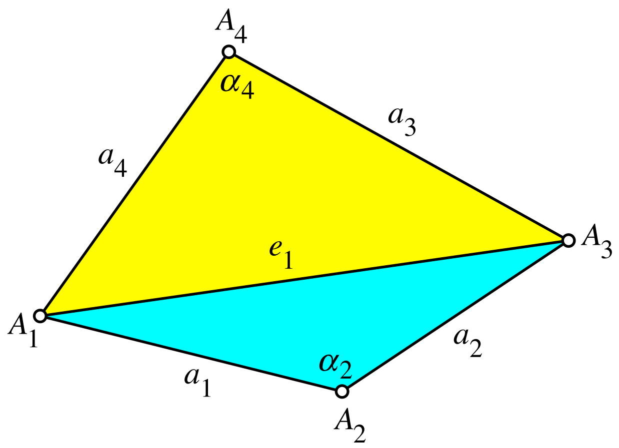

Abb. 1: Unterteilung

Für den Flächeninhalt A des Viereckes gilt daher:

$$A(\alpha_2, \alpha_4) = \tfrac{1}{2}\left(a_1a_2\sin(\alpha_2) + a_3a_4\sin(\alpha_4)\right)$$

Nach dem Kosinussatz gilt für die Diagonale e_1:

$$e_1^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(\alpha_2)$$
$$e_1^2 = a_3^2 + a_4^2 - 2a_3a_4\cos(\alpha_4)$$

Somit haben wir die Nebenbedingung:

$$\Phi(\alpha_2,\alpha_4) = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(\alpha_2) - a_3^2 - a_4^2 + 2a_3a_4\cos(\alpha_4) = 0$$

Wir haben die Funktion $A(\alpha_2,\alpha_4)$ unter der Nebenbedingung $\Phi(\alpha_2,\alpha_4)=0$ zu optimieren.
Nach dem üblichen Verfahren bilden wir die Hilfsfunktion

$$F(\alpha_2,\alpha_4,\lambda) = A(\alpha_2,\alpha_4) - \lambda\Phi(\alpha_2,\alpha_4)$$

und setzen deren Gradienten null:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = \tfrac{1}{2}a_1a_2\cos(\alpha_2) - 2a_1a_2\lambda\sin(\alpha_2) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_4} = \tfrac{1}{2}a_3a_4\cos(\alpha_4) + 2a_3a_4\lambda\sin(\alpha_4) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -a_1^2 - a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\alpha_2) + a_3^2 + a_4^2 - 2a_3a_4\cos(\alpha_4) = 0$$

Die ersten beiden Gleichungen lauten vereinfacht:

$$\tfrac{1}{2}\cos(\alpha_2) = 2\lambda\sin(\alpha_2) \qquad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{4\tan(\alpha_2)}$$
$$\tfrac{1}{2}\cos(\alpha_4) = -2\lambda\sin(\alpha_4) \qquad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{4\tan(\alpha_4)}$$

Aus $\tan(\alpha_4) = -\tan(\alpha_2)$ folgt $\alpha_2 + \alpha_4 = \pi$. Wir haben ein Sehnenviereck.

3 Allgemein

Für den allgemeinen Fall setzen wir die Existenz einer Lösung voraus. Jakob Steiner hat das auch so gemacht.

Nun zeigen wir, dass der Flächeninhalt eines nicht-Sehnen-n-Ecks vergrößert werden kann.

Dazu zeichnen wir zunächst den Kreis durch die drei Punkte A_1, A_2, A_3 (Abb. 2). Da das n-Eck kein Sehnen-n-Eck ist, gibt es mindestens einen Punkt A_j, der nicht auf diesem Kreis liegt.

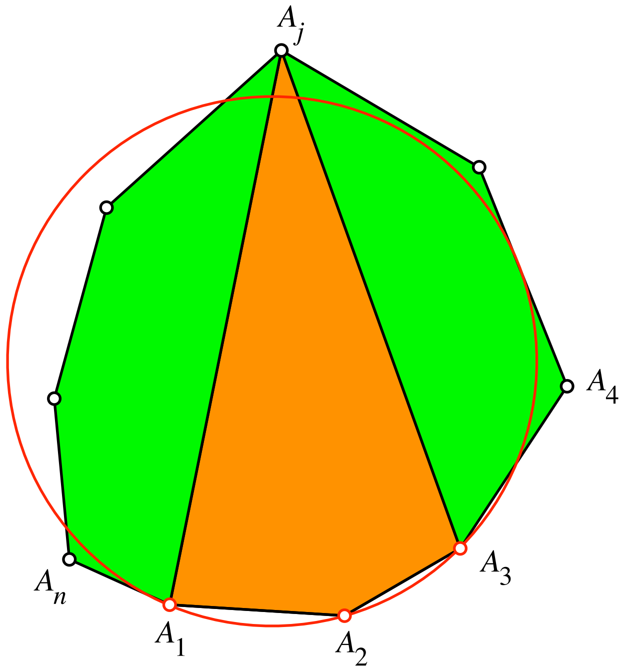

Abb. 2: Beweisfigur

Wir unterteilen nun das n-Eck in das Viereck $A_1A_2A_3A_j$ (orange) und die beiden Vielecke $A_3...A_j$ und $A_j...A_1$ (grün). Die beiden grünen Vielecke können in Sonderfällen Strecken sein.

Nun denken wir uns die beiden grünen Vielecke starr, aber im Punkt A_j gelenkig verbunden. Das orange Viereck denken wir uns als Gelenkfigur. Da es kein Sehnenviereck ist, vergrößert sich sein Flächeninhalt, wenn wir es unter Beibehaltung der Seitenlängen in ein Sehnenviereck bewegen.

Da die grünen Vielecke starr sind, hat sich deren Flächeninhalt nicht verändert. Wegen der Vergrößerung des orangen Vierecks ist der gesamte Flächeninhalt des n-Ecks größer geworden.

Somit gilt allgemein, dass der Flächeninhalt genau für ein Sehnen-n-Eck maximal ist.

4 Bestimmung des optimalen Vielecks. Offene Fragen

4.1 Bestimmung des Sehnenviereckes

Zu gegebenen vier Seiten ist ein Viereck bei Kenntnis eines Winkels bestimmt.

Wenn wir nun $\alpha_4 = \pi - \alpha_2$ in die Nebenbedingung $\Phi(\alpha_2, \alpha_4) = 0$ einsetzen, erhalten wir:

$$\cos(\alpha_2) = \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2}{2(a_1 a_2 + a_3 a_4)}$$

Die Abbildung 3 zeigt das zu den Seitenlängen a_1, a_2, a_3, a_4 des Viereckes der Abbildung 1 gehörende Sehnenviereck.

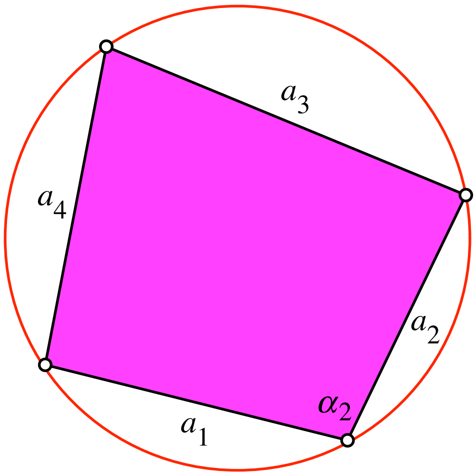

Abb. 3: Sehnenviereck

Für weitere Berechnungen im Sehnenviereck siehe [Weblink 1].
Für mich offene Frage: Gibt es eine direkte einfache Konstruktion?

4.2 Allgemeines Sehnenvieleck

Die Bestimmung des Sehnen-n-Ecks aus den n Seitenlängen ist für mich eine offene Frage, ebenso die direkte Berechnung des Umkreisradius und des Flächeninhaltes.

Weblinks

[Weblink 1]: Flächenoptimierung im Viereck:
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/Fl_Opt_Viereck/Fl_Opt_Viereck.htm